Multiplicity of function zeros تعددية اصفار الدالة

الصفر البسيط (الجذر البسيط): اذا كانت للدالة $f(x)$ صفراً عند النقطة $x = p$ (جذراً للمعادلة $f(x) = 0$) فيمكن كتابة الدالة بالشكل التالي :

$$f(x) = (x - p)g(x), \quad g(p) \neq 0$$

في هذه الحالة يسمى $x = p$ صفراً بسيطاً للدالة (simple zero) او جذراً بسيطاً للمعادلة $f(x) = 0$ (simple root)

الجذر من التعددية m (من الرتبة m**):** (root of multiplicity m)

اذا كان $x = p$ صفراً للدالة f من التعددية m فيمكن كتابة الدالة بالشكل التالي:

$$f(x) = (x - p)^m g(x), \quad g(p) \neq 0$$

مثال:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$= (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$$

$$= (x - 1)(x - 2)^2$$

فان للمعادلة جذر اما من التعددية $m = 1$

$$f(x) = (x - p)g(x)$$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2,$$

$$g(1) = (x - 2)^2 = 1 \neq 0$$

او

$$f(x) = (x-p)g(x) \;\rightarrow\; f(x) = (x-2)^2(x-1),$$

$$g(2) = (2-1) = 1 \;\neq 0$$

اذن $x = 2$ صفر للدالة f ويمتلك تعددية $m = 2$، اي ان الدالة $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ تمتلك صفرين:

الصفر الاول: 1 وهو صفراً بسيطاً (جذر بسيط)

الصفرالثاني: 2 وهو صفراً من التعددية 2

مثال: جد جذور المعادلة التالية وتعددية كل منها:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$$

الحل:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$$

$$= (x-3)(x^2 + 2x - 15)$$

$$= (x-3)^2(x+5)$$

اما

$$f(x) = (x-3)^2 g(x), \;\; g(3) = (3+5) = 8 \neq 0$$

اذا 3 يمثل جذر للمعادلة ذو تعددية $m = 2$

او

$$f(x) = (x+5)g(x), \;\; g(-5) = (-5-3)^2 = 64 \neq 0$$

اذان $x = -5$ يمثل جذر بسيط و $x = 3$ يمثل جذراً مضاعفاً

Example: let $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ find the multiplicity of x=3

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

$f(x) = (x - p)g(x) \rightarrow f(x) = (x - 3)(x^2 - x - 6)$

$= (x - 3)(x + 2)\ (x - 3)$

$= (x - 3)^2\ (x+2)$

$f(x) = (x - p)g(x)$

$g(3) = (x + 2) = 5 \neq 0$

اذن $x = 3$ صفر للدالة f ويمتلك تعددية $m = 2$

Example: let $f(x) = x^2 cosx$ find the multiplicity of x=0

$f(x) = (x - p)g(x) \rightarrow f(x) = (x - 0)^2 cosx$

$g(0) = cos0 = 1 \neq 0$

اذن $x = 0$ صفر للدالة f ويمتلك تعددية $m = 2$

نظرية: اذا كانت $f \in C^m[a, b]$ **,** فأن الدالة f تمتلك جذر ذو تعددية m عند $x = p$ اذا وفقط اذا
$f(p) = f'(p) = f''(p) = \ldots = f^{(m-1)}(p) = 0, \quad f^{(m)}(p) \neq 0$

حيث ان m تمثل رتبة المشتقة.

Theorem : If $f(x)$ is m-times continuously differentiable at p, them p is root of $f(p)$ with multiplicity m if and only if

$f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) = 0,\ f^{(m)}(p) \neq 0.$

حسب المثال السابق

$f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 21, \quad f''(x) = 6x - 2$

at $x = 3, \qquad f(3) = 0, \; f'(3) = 0, \quad f''(3) = 16 \neq 0$

at $x = -5, \quad f(-5) = 0, \; f'(-5) = 64 \neq 0$

اذا $x = -5$ يمثل جذر بسيط (is a simple root (m=1))

و $x = 3$ يمثل جذر للمعادلة من التعددية 2

مثال: اثبت ان للدالة $f(x) = e^x - x - 1$ صفراً مزدوجاً $(m = 2)$ عند $x = 0$

الحل:

$f(x) = e^x - x - 1, \; f(0) = 0,$

$f'(x) = e^x - 1, \; f'(0) = 0,$

$f''(x) = e^x, \; f''(0) = 1 \neq 0.$

By using Theorem, we have $x = 0$ is a root of order 2 (m=2).

Example: Find the multiplicity of root by using the theorem

1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

2) $f(x) = x^2 cosx$ H.W

3) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$ H.W

sol.

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3, \quad f''(x) = 6x - 8$

at $x = 3, \qquad f(3) = 0,\ f'(3) = 0, \quad f''(3) = 10 \neq 0$

at $x = -2, \quad f(-2) = 0, \ f'(-2) = 19 \neq 0$

$x = 3$ is a root of order 2 (m=2).

$x = -2$ is a simple root (m=1)

Example: Find the values of a and b so that $f(x) = ax^4 - 2x^2 + 4bx - 8$ has the root 1 with multiplicity ≥ 2 . H.W