1-5 الاخطاء في حساب الدوال

لتكن x_aالقيمة التقريبية للقيمة المضبوطة x وبخطأ مطلق e_x ولتكن $f(x_a)$ القيمة التقريبية للدالة f عند النقطة x_a. فان الخطأ المطلق في حساب الدالة f عند النقطة x يعرف بالشكل التالي:

$$e_{f(x)} = |f(x) - f(x_a)|$$

$$= |f(x) - f(x - e_x)|$$

باستخدام متسلسلة تايلور للدالة f حول النقطة x_a، نحصل على

$$e_{f(x)} = \left|f(x) - \left(f(x) - e_x f'(x) + \frac{(e_x)^2}{2!} f''(x) + \cdots\right)\right|$$

حيث ان الصيغة العامة لمتسلسلة تايلور للدالة f هي:

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$
$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0 + (-\Delta x))$

بما ان $(e_x)^2$ تقترب من الصفر، يمكن تبسيط صيغة $e_{f(x)}$ اعلاه بالشكل التالي:

$$e_{f(x)} \cancel{=} |f(x) \cancel{-} f(x) + e_x f'(x)|$$

$$\le e_x |f'(x)|$$

مثال: جد قيود القيم الحقيقية للدالة $f(x) = Log_2(1 + x^2)$ ، عند النقطة $x_a = 2.581$
وبخطأ $e_x = 0.5x10^{-3}$

الحل:

ملاحظة: $f(x_a) - e_{f(x)} \le f(x) \le f(x_a) + e_{f(x)}$

$$Log_2 = \frac{ln(1 + x^2)}{ln2}$$

$$f(x) = \frac{ln(1+x^2)}{ln2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{ln2}\ (\frac{2x}{1+x^2})$$

$$f(x_a) = f(2.581) = 2.9376$$

$$e_{f(x)} \le e_x\ .|f'(x)|$$

$$\le 0.5x10^{-3}\ .\ (0.972) = 0.486\ x\ 10^{-3}$$

قيود القيم الحقيقية للدالة f هي :

$$f(x) \in [f(x_a) - e_{f(x)}\ , f(x_a) + e_{f(x)}]$$

$$f(x) \in [2.9376 - 0.486\ x\ 10^{-3}, 2.9376 + 0.486\ x\ 10^{-3}]$$

$$f(x) \in [2.93711, 2.93808]$$

مثال : جد قيود القيم الحقيقة للمقادير $x.y$ و $x+y$, حيث ان $x_a = 2.314,\ y_a = 0.02$
وان كل من x_a و y_a ناتجة من التقريب بالتدوير

الحل:

قيود القيم الحقيقية للمقدار $x+y$ تكتب بالشكل:

$$(x_a + y_a) - e_{(x+y)} \leq (x+y) \leq (x_a + y_a) + e_{(x+y)}$$

القيم الحقيقية للمقدار $(x+y)$ تقع ضمن الفترة:

$$(x+y) \in [(x_a + y_a) - e_{(x+y)}, (x_a + y_a) + e_{(x+y)}]$$

$$|e_{(x+y)}| = |e_{(x)}| + |e_{(y)}|$$
$$= 0.05 \times 10^{-2} + 0.5 \times 10^{-2} = 0.55 \times 10^{-2}$$

$$(x+y) \in [2.334 - 0.55 \times 10^{-2}, 2.334 + 0.55 \times 10^{-2}]$$
$$(x+y) \in [2.3285, 2.3395]$$

واجب $(H.W)$ $\qquad x.y$