1-3 صيغة النقطة العائمة : **(The floating-point representation)**

في حال كون عدد ما كبير جداً او صغير جداً، فانه يلزم عدد كبير من الخانات للتعبير عن ذلك العدد. فمثلا سرعة الضوء هي:

C=299790000m/s

وشحنة الالكترون هي: e= 0.00000000000000000016022 C

لاحظ العدد الكبير من الخانات اللازم للتعبير عن هاتين القيمتين. وفي اجهزة الحاسوب، حيث يتم تخزين الاعداد ومعالجتها بالنظام الثنائي ، فان عدد الخانات اللازمة للتعبير عن هاتين القيمتين سيكون كبيراً جداً.
ولتقليل عدد الخانات اللازمة للتعبير عن الاعداد فانه يمكن استعمال صيغة النقطة العائمة للتعبير عنها.

في صيغة النقطة العائمة فان الاعداد تكتب بالصيغة:

$$x = \pm f \,.\, B^{\pm E}$$

f: الجزء الكسري (fraction)

B: الاساس (base)

E: الاس (exponent)

من الواضح ان هذا التمثيل لاي عدد ليس وحيداً، فالعدد x اعلاه يمكن كتابته ايضاً بالصيغة:

$$x = \pm(f.B).B^{(\pm E-1)}$$

واكثر صيغ تمثيل النقطة العائمة استخداماً هي تلك الصيغة التي فيها:

$$\frac{1}{B} \le f \le 1$$

وتسمى هذه الصيغة من التمثيل بالصيغة العلمية . في هذه الصيغة فان العدد x يكتب بالصيغة:

$$x = \pm(0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_k).B^{\pm E}$$

حيث:

$1 \le d_i \le B$,
$0 \le d_i < B$ for $i \neq 1$.

مثال: العدد $x = 567.89$ مكتوباً بصيغة النقطة العائمة (الصيغة العلمية) هو

$0.56789x10^3$. في هذه الصيغة الجزء الكسري هو $f = 0.56789$ والاساس هو $B =$ 10 والاس هو $E = 3$

مثال: شحنة الالكترون هي: e=0.00000000000000000016022C

لاحظ ان عدد الخانات اللازم لتمثيل هذا العدد بصيغته الحالية هو اربع وعشرين خانة، بينما بصيغة النقطة العائمة (الصيغة العلمية) فان هذا العدد يكتب بالصيغة:

$$e= 0.16022x10^{-18}\ C$$

لاحظ ان عدد الخانات اللازمة لكتابة هذا العدد بهذه الصيغة هو خمس خانات للجزء الكسري وخانتين للأس(عدا الخانة اللازمة للتعبير عن الاشارة)، اي ما مجموع سبع خانات فقط.

وعند تمثيل هذا العدد بالنظام الثنائي فان التمثيل بصيغة النقطة العائمة سيوفر عدداً اكبر من الخانات.

1-4 تقريب القيم العددية

يمكن ان تلاحظ ان الكثير من القيم العددية، مثل:

$$\frac{1}{3} = 0.3333333 \ldots = 0.3333333 \ldots x10^0$$

$$\pi = 3.141592 \ldots = 0.3141592 \ldots x10^1$$

$$\sqrt{2} = 1.414213 \ldots = 0.1414213 \ldots x10^1$$

وغيرها، لا يمكن التعبير عنها بصورة دقيقة باستخدام عدد محدود من الخانات وحيث انه من غير المنطقي التعبير عن مثل هذه الاعداد باستخدام عدد لا نهائي من الخانات، وكذلك لمحدودية عدد الخانات التي تستخدها اجهزة الحاسوب لاجراء العمليات السابية المختلفة وتخزين القيم العددية فانه من الضروري التعبير عن هذه القيم باستخدام عدد محدود من الخانات بالرغم من وجود خطأ معين في ذلك.

وتستخدم عادة احدى الطريقتين التاليتين للتعبير عن الاعداد باستخدام عدد محدود من الخانات وهما:

1- طريقة القطع (Chopping): وهي اهمال الخانات الموجودة بعد خانة محددة.
فبأستخدام هذه الطريقة واستخدام خمس خانات فقط (في الجزء الكسري) يمكن التعبير عن القيمة π بالشكل $\pi = 0.14142x10^1$

2- طريقة التدوير(Rounding-off): وتتمثل هذه الطريقة باستخدام عدد محدد من الخانات وتقريب الخانة الاخيرة.
فباستخدام هذه الطريقة واستخدام خمس خانات فقط يمكن التعبير عن القيمة π بالشكل:
$\pi = 0.31416x10^1$ وعن القيمة $\sqrt{2}$ بالشكل: $\sqrt{2} = 0.14142x10^1$

3- نلاحظ ان الخطا الناتج عند تقريب القيم العددية باستخدام عملية ال rounding-off دائما اقل او يساوي الخطأ الناتج باستخدام عملية ال chopping.

مثال: اوجد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{15}$ باستخدام خمس خانات فقط وباستخدام طريقتي ال chopping وال rounding-off ، واوجد قيمة الخطأ الناتج عن كل طريقة.

الحل: قيمة العدد $\sqrt{15}$ باستخدام ست خانات هي . $0.387298x10^1$
القيمة التقريبية ل $\sqrt{15}$ باستخدام خمس خانات واستخدام ال chopping هي
$0.38729x10^1$

القيمة التقريبية ل $\sqrt{15}$ باستخدام خمس خانات واستخدام ال rounding-off هي
$0.38730x10^1$

الخطأ الناتج عن عملية التقريب باستخدام طريقة ال chopping هو:
$|0.387298x10^1 - 0.38729x10^1| = 0.8 \times 10^{-4}$

الخطأ الناتج عن عملية التقريب باستخدام طريقة ال rounding-off هو:

$|0.387298x10^1 - 0.38730x10^1| = 0.2 \times 10^{-4}$

اي 25% من قيمة الخطأ في طريقة ال chopping.

1-5 الاخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية الاربعة

افرض ان x_a, y_a هما قيمتين تقريبيتين للقيمتين الحقيقيتين x, y وبخطأ مطلق e_x, e_y وخطأ نسبي Re_x, Re_y، فان الاخطاء المطلقة والنسبية في ناتج كل عملية حسابية $(+, -, *, \div)$

تعطى بالشكل التالي:

1. الاخطاء الناتجة عن عملية الجمع

$$|e_{(x+y)}| = |(x+y) - (x_a + y_a)|$$
$$= |(x - x_a) + (y - y_a)|$$
$$= |e_x + e_y|$$
$$\leq |e_x| + |e_y|$$

$$|R_{e_{(x+y)}}| = \frac{|e_{(x+y)}|}{|x+y|}$$
$$= \frac{1}{|x+y|}(|e_{(x+y)}|)$$
$$\leq \frac{1}{|x+y|}(|e_x| + |e_y|)$$
$$\leq \frac{1}{|x+y|}(|x|\frac{|e_x|}{|x|} + |y|\frac{|e_y|}{|y|})$$
$$\leq \frac{1}{|x+y|}(|x|R_{ex} + |y|R_{ey})$$

2. الاخطاء الناتجة عن عملية الطرح

$|e_{(x-y)}| =?$ H.W

$|R_{(ex-ey)}| =? \quad H.W$

1- الاخطاء الناتجة عن عملية الضرب

$$\boldsymbol{e(x\,.\,y)} = |(x.y) - (xa\,.\,ya)|$$
$$= |(x.y) - (x - ex)(y - ey)|$$
$$= |\cancel{x.y} - \cancel{x.y} + x.ey + yex - ex\,.ey|$$

فإذا افترضنا بأن الأخطاء صغيرة بالنسبة إلى القيم التقريبية. يمكننا إهمال الحد في حاصل ضرب الخطأين $(e_x.e_y)$ لنحصل على:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}\,.\,\boldsymbol{y}) = |xe_y + ye_x| \leq |x|e_y + |y|e_x$$ (الخطأ المطلق)

وبتقسيم طرفي المعادلة السابقة على $|xy|$ نحصل على

$$\frac{e_{(x.y)}}{|xy|} \leq \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|}$$

$$R_{x.y} = R_x + R_y$$ (الخطأ النسبي)

2- الاخطاء الناتجة عن عملية القسمة

من تعريف الخطأ المطلق يكون حاصل قسمة القيمتين التقريبيتين:

$$e_{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{x}{y} - \frac{x_a}{y_a}$$

بعد الضرب بالمقدار $\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$

$$\frac{x_a}{y_a} = \frac{x-e_x}{y-e_y} = \frac{x-e_x}{y}\cdot\frac{1}{1-\frac{e_y}{y}}$$

حيث ان المقدار الثاني $\frac{1}{1-\frac{e_y}{y}}$ يمثل مجموع المتسلسلة الهندسية:

$$1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^4 + \cdots$$

نحصل على:

$$\frac{x_a}{y_a} = \left(\frac{x - e_x}{y}\right)\left(1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^4 + \cdots\right)$$

وبإهمال الحدود التي تحوي حاصل ضرب خطأين أو أكثر، نحصل على الخطأ المطلق في ناتج القسمة:

$$e_{(\frac{x}{y})} = \frac{x}{y}(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y})$$

ومن تعريف الخطأ النسبي نحصل على:

$$R_{(\frac{x}{y})} = (R_x - R_y)$$

مثال: ليكن 3.68 و 2.133 عددين مدورين إلى الرقم الاخير لكل منهما. اوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حاصل ضرب العددين.

الحل: افرض $x_a = 3.68$ و $y_a = 2.133$.

اذا $x_a . y_a = 7.84944$

بما ان العددين مدورين الى الرقم الاخير، لذا فان نسبة الخطأ المطلق سوف تكون

$|e_x| \le 0.005, \quad |e_y| \le 0.0005$

$$e_{x.y} = x_a e_y + y_a e_x$$

$$\le 3.68\ (0.0005) + 2.133(0.005)$$

≈ 0.013

اما بالنسبة للخطأ النسبي فيمكن حسابه كما يأتي:

$$R_{x.y} = \frac{|e_{x.y}|}{|x_a . y_a|}$$

$$\le \frac{0.013}{7.849} = 0.0016$$

سؤال: جد الحدود العليا المحتملة للخطأ المطلق والخطأ النسبي والنسبة المئوية للخطأ لكل من الاعداد التالية على فرض أن هذه الاعداد 1) مدورة 2) مقطوعة:

2.57 x 19.80 (a

2.57 / 19.80 (b

5.20-2.577 (c

5.20+2.57 (d