مقرر الجبر الخطي

الأنظمة الخطية

Linear Systems

الفصل الثاني

المحاضرة الرابعة

اعداد: د. فاضل الاعرجي

2026-2025

أهداف المحاضرة

الهدف العام

تمكين الطالب من فهم مفهوم الأنظمة الخطية واستيعاب الطرق المختلفة لحلها وتطبيقها بشكل صحيح.

الأهداف السلوكية

- تعريف المعادلة الخطية وتمييزها عن المعادلات غير الخطية.
- فهم مفهوم نظام المعادلات الخطية وأنواع حلوله الممكنة.
- تطبيق طريقة كرامر (Cramer's Rule) لحل الأنظمة الخطية.
- استخدام طريقة معكوس المصفوفة لإيجاد حلول الأنظمة الخطية.

تعريف المعادلة الخطية

المعادلة الخطية بمتغيرين تمثل خطاً مستقيماً في المستوي :xy

$$a_1x + a_2y = b$$

الصيغة العامة للمعادلة الخطية بـ n من المتغيرات:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ ثوابت حقيقية و $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغيرات.

شروط المعادلة الخطية (ما يجب تجنبه):

- متغيرات بدرجة أعلى من 1(مثل x^2)
- جذور للمتغيرات (مثل $\sqrt{x}$)
- دوال مثلثية للمتغيرات (مثل $\sin x$)
- ضرب متغيرات ببعضها (مثل xy)

أمثلة على المعادلات الخطية وغير الخطية

معادلات خطية

$$x + 2y = 8$$

جميع المتغيرات من الدرجة الأولى

$$(\sin\frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 = e^2$$

لاحظ أن $\sin(\pi/2)$ وe^2 هي ثوابت وليست متغيرات

$$\frac{1}{2}x + y - \frac{\pi}{2}z = \sqrt{2}$$

المعاملات يمكن أن تكون جذوراً أو كسوراً

معادلات غير خطية

$$xy + z = 2$$

سبب: ضرب متغيرين ببعضهما (xy)

$$\sin x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

سبب: دالة مثلثية للمتغير $(\sin x_1)$

$$\frac{1}{x} + y = 4$$

سبب: المتغير في المقام (أس سالب)

مفهوم الحل وتعدد الحلول

حل المعادلة الخطية بـ n متغيرات هو مجموعة من الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة عند التعويض.

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

حل أول: $x_1 = 2, x_2 = 1$

حل ثانٍ: $x_1 = -4, x_2 = 4$

حل ثالث: $x_1 = 0, x_2 = 2$

لماذا يوجد عدد لا نهائي من الحلول؟

لأن عدد المجاهيل (2) أكبر من عدد المعادلات (1).

هذا يعني وجود "درجة حرية" لاختيار قيم المتغيرات.

لإيجاد الحل العام، نفرض قيمة اختيارية لأحد المتغيرات:

$$\text{Let } x_2 = t$$

$$x_1 = 4 - 2t$$

حيث **t** هو أي عدد حقيقي (Parameter).
كلما اخترنا قيمة لـ t حصلنا على حل جديد.

نظام المعادلات الخطية

الصيغة العامة (m معادلة في n متغير):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

صيغة المصفوفات:

$$Ax = b$$

A: مصفوفة المعاملات $(m\times n)$
x: متجه المتغيرات $(n\times 1)$
b: متجه الثوابت $(m\times 1)$

إمكانية الحلول للنظام الخطي

حل وحيد

يوجد مجموعة واحدة فقط من القيم تحقق جميع المعادلات.

عدد لا نهائي من الحلول

يوجد عدد غير منتهٍ من القيم التي تحقق النظام.

لا يوجد حل

النظام مستحيل الحل (المعادلات متناقضة).

طرق حل النظام الخطي

طريقة كرامر (Cramer's Rule)

نص النظرية:

ليكن $Ax = b$ نظاماً خطياً مكوناً من n معادلات و n مجاهيل (أي ان A مصفوفة مربعة)
إذا كانت مصفوفة المعاملات A قابلة للانعكاس (أي أن محددها $0 \neq |A|$)، فإن للنظام حلاً وحيداً يُعطى بالصيغ التالية:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad , \dots , x_m = \frac{|A_m|}{|A|}$$

حيث A_i هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة الأصلية A بعد استبدال العمود رقم i بمتجه الثوابت (القيم المطلقة) b

مثال (طريقة كرامر): جد حل النظام الخطي التالي

النظام الخطي:

$$-x + 2y - 3z = 1$$
$$2x + z = 0$$
$$3x - 4y + 4z = 2$$

1. حساب محدد مصفوفة المعاملات |A|:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

2. حساب قيمة x

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{10}$$

x = 4/5

3. حساب قيمة y

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{10}$$

y = -3/2

4. حساب قيمة z

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-16}{10}$$

z = -8/5

طريقة معكوس المصفوفة

لحل النظام الخطي $Ax = b$ نستخدم القانون:

$$x = A^{-1}b$$

x	متجه المتغيرات (المجاهيل)
A	مصفوفة المعاملات
b	متجه القيم المطلقة (الثوابت)
A^{-1}	معكوس مصفوفة المعاملات

شروط الاستخدام

- عدد المعادلات = عدد المتغيرات (n = m)
- المصفوفة A قابلة للانعكاس (|A| ≠ 0)

خطوات الحل

1. إيجاد معكوس المصفوفة A^{-1}
2. ضرب المعكوس في متجه الثوابت b

مثال : حل النظام التالي بأستخدام طريقة معكوس المصفوفة

النظام الخطي:

$$4x_1 - 2x_2 = 10$$

$$3x_1 - 5x_2 = 11$$

1 إيجاد معكوس المصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (4)(-5) - (-2)(3) = -20 + 6 = -14$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2 حساب قيم المتغيرات $(x = A^{-1}b)$

$$A^{-1} = {}^{1}\!/_{-14} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad , b = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} , X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = {}^{1}\!/_{-14} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$= {}^{1}\!/_{-14} \begin{pmatrix} -50 + 22 \\ -30 + 44 \end{pmatrix} = {}^{1}\!/_{-14} \begin{pmatrix} -28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

الحل النهائي

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$

مثال : حل النظام الاتي بأستخدام معكوس المصفوفة

النظام الخطي

$$x - 2y + 3z = 9$$
$$-x + 3y = -4$$
$$2x - 5y + 5z = 17$$

1 **مصفوفة المعاملات A**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

2 **المحدد |A|**

$$|A| = 2 \neq 0$$

3 نحسب معكوس المصفوفة A^{-1}

$$c_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 15 & 5 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -9 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 15 & -5 & -9 \\ 5 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 15 & -5 & -9 \\ 5 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-9}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4 حل النظام

5

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-9}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x = 1, y = -1, z = 2}$$

نشاط فردي

أوجد مجموعة الحل للنظام الخطي التالي:

$$2x + 3y = 7$$

$$x - y = 1$$

المطلوب:

استخدم إحدى الطريقتين التاليتين للوصول إلى الحل:

- طريقة كرامر (Cramer's Rule)
- طريقة معكوس المصفوفة (Inverse Matrix)

5 دقائق

تلميح:

تأكد أولاً من أن محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي صفراً ($|A| \neq 0$).

نشاط جماعي :حل الأنظمة الخطية

النظام المطلوب حله:

$$x + 2y - z = 2 \; 2x - y + z = 3x + y + z = 6$$

المطلوب:

1. حل النظام باستخدام طريقة كرامر .
2. حل النظام باستخدام معكوس المصفوفة .
3. مقارنة النتائج والتأكد من تطابقها.

المناقشة:

أي الطريقتين كانت أسرع؟ ولماذا؟

Hint: $x = 1, y = 2, z = 3$.

الواجب

1 حل النظام التالي باستخدام طريقة كرامر:

$$3x - y = 7$$
$$2x + 3y = 1$$

2 حل النظام التالي باستخدام معكوس المصفوفة:

$$x + y + z = 4$$
$$2x - y + 3z = 9$$
$$-x + 2y - z = -1$$

موعد التسليم:

قبل بداية المحاضرة القادمة