نظرية تايلور (متسلسلة تايلور) Taylor's Theorem (Taylor's Series)

وهي من النظريات المهمة في التقنيات العددية حيث تمكننا هذه النظرية من تمثيل دالة معينة بمتسلسلة غير منتهية من الدوال الابسط.

تنص هذه النظرية على انه اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة حول نقطة معينة مثل x_0 وكانت هذه الدالة قابلة للاشتقاق n عدد من المرات (جميع مشتقات هذه الدالة حتى المشتقة رقم n موجودة) حول النقطة x_0 فأن قيمة هذه الدالة عند اي نقطة x في محيط النقطة x_0 تعطى بالعلاقة

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

حيث:

$f^{(n)}(x_0)$: المشتقة رقم (n-th derivative) للدالة $f(x)$ عند النقطة $x = x_0$

اي :

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=x_0}$$

h: بعد النقطة x عن النقطة $h = x - x_0$

R_n: الحد المتبقي (remainder term) وهو يصف مقدار الخطأ الناتج عن استخدام عدد محدود من الحدود (truncation error) وقيمته هي:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta)$$

حيث ζ هي نقطة ما موجودة بين النقطتين x و x_0

ومن المعادلة الاخيرة والتي تصف الحد المتبقي R_n يصبح واضحاً ان مقدار الخطأ بتقدير قيمة الدالة عند النقطة x يكون قليلاً كلما:

1- كان البعد بين النقطتين x و x_0 (قيمة h) قليلاً.
2- كلما كان عدد الحدود المستخدمة لتقدير قيمة الدالة اكبر (زادت قيمة n)

ملاحظة: عند فرض قيمة $x_0 = 0$ في متسلسلة تايلور، ينتج متسلسلة جديدة تسمى متسلسلة Maclaurin

مثال: اكتب متسلسلة تايلور (Taylor's Series) للدالة $f(x) = e^x$ حول النقطة $x_0 = 0$

الحل: الصيغة العامة لمتسلسلة تايلور هي:

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

للدالة $f(x) = e^x$ عند النقطة $x_0 = 0$ فأن:

$$f(x) = f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = f''(x) = \cdots f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1$$

وكذلك $h = x - x_0 = x - 0 = x$

اي انه، وحول النقطة $x_0 = 0$ فأن:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

والحد المتبقي هو

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta) = R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\zeta}, \quad 0 \le \zeta \le x$$

1-6 تمارين

1- اكتب العددين التاليين بصيغة النقطة العائمة:

a= 56790.33, b=0.00002463

2- اكتب العدد $\sqrt{31}$ بصيغة النقطة العائمة مستخدما اربع خانات فقط في الجزء الكسري ومقربا النتيجة باستخدام كل من طريقتي ال chopping وال rounding off. اوجد قيمة الخطأ الناتج عن كل طريقة من طرق التقريب هذه.

3- حول العدد الثنائي $(110011.111)_2$ و العدد $(101011.101)_2$ الى النظام العشري وعبر عنهما باستخدام صيغة النقطة العائمة.

4- جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2t - t^2 - t^3$ في الفترة[1 ,2-]

5- جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 - x - 1$ في الفترة[2 ,1]

6- استخدم نظرية القيمة الوسيطة لاثبات ان للمعادلة $x^5 - 3x = 4 - x^2$ قابلة للحل

7- باستخدام نظرية القيمة الوسيطةاثبت ان المعادلة $\frac{3-x}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+2}$ تمتلك حل في الفترة [0,3] .

8- اثبت ان للمعادلة $x = e^{-x}$ جذر في الفترة $[-1,1]$ ، ثم بتصنيف الفترة ثلاث مرات متتالية اوجد قيمة تقريبية لهذا الجذر.

9- باستخدام متسلسلة تايلور (Taylor's Theorem) قدر قيمة $e^{0.1}$ بحيث ان مقدار الخطأ في التقدير يكون اقل من 10^{-5}

10- اوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = sin\ (x)$ حول النقطة $x_0 = 0$. ثم جد ال truncation error (R_n)

11- اوجد الحدود الثلاث الاولى من متسلسلة تايلور (Taylor's series) للدالة $f(x) = e^{3x}$ حول النقطة $x_0 = 0$.

12-اوجد الحدود الثلاث الاولى من متسلسلة تايلور (Taylor's series) للدالة $f(x) = cos(x)$ حول النقطة $x_0 = 0$.

13- اوجد الحدود الثلاث الاولى من متسلسلة تايلور (Taylor's series) للدالة $f(x) = tan\ (x)$ حول النقطة $x_0 = 0$.

14- باستخدام متسلسلة تايلور (Taylor's series) للدالة $f(x) = e^x$ حول النقطة $x_0 = 0$، قدر قيمة $e^{-0.01}$ بحيث ان مقدار الخطأ في التقدير يكون اقل من 10^{-7}

15- باستخدام متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = sin\ (x)$ ، قدّر قيمة $sin\ (6^0)$ بحيث ان مقدار الخطأ في التقدير يكون اقل من 10^{-6} .

16- قدر قيمة التكامل المحدد $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\, x^2\, dx$

17-قدّر قيمة التكامل المحدد $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\, x^2\, dx$