نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات **Weighted-Mean-Value Theorem**

تمكنا هذه النظرية من تقدير قيمة التكامل المحدد لحاصل ضرب دالتين في فترة معينة. تنص هذه النظرية على انه اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت الدالة $g(x)$ لا تغير اشارتها في تلك الفترة، فان هناك عدد مثل c في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث ان:

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

ملاحظة: اذا كانت $g(x)=1$ لكل نقاط الفترة $[a,b]$، فأن $f(c)$ تساوي القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في تلك الفترة

وذلك لان:

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

وبتعويض قيمة $g(x)=1$ في المعادلة اعلاه، نحصل على

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b dx = f(c)(b-a)$$

اي ان:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

مثال: جد قيمة التكامل المحدد $\int_1^2 xe^x dx$

الحل: افرض ان $g(x)=e^x$

$f(x)=x$

لاحظ ان $f(x)$ مستمرة في الفترة $[1,2]$ وان $g(x)$ لا تغير اشارتها في هذه الفترة ، لذا

$$\int_1^2 xe^x\,dx = f(c)\int_1^2 e^x\,dx = f(c)(e^2-e^1) = 4.6708f(c)$$

ولكن $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ وعليه

$$f(c) = \frac{1}{2-1}\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} = 1.5$$

اي ان: $\int_1^2 xe^x dx = 4.6708 \times 1.5 = 7.0062$

قدر قيمة التكامل المحدد $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \boldsymbol{sin\,(x)\,x^2\,dx}$ **H.W**

قدّر قيمة التكامل المحدد $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \boldsymbol{cos\,(x)\;x^2\,dx}$ **H.W**

نظرية تايلور (متسلسلة تايلور) Taylor's Theorem (Taylor's Series)

وهي من النظريات المهمة في التقنيات العددية حيث تمكننا هذه النظرية من تمثيل دالة معينة بمتسلسلة غير منتهية من الدوال الابسط.

تنص هذه النظرية على انه اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة حول نقطة معينة مثل x_0 وكانت هذه الدالة قابلة للاشتقاق n عدد من المرات (جميع مشتقات هذه الدالة حتى المشتقة رقم n موجودة) حول النقطة x_0 فأن قيمة هذه الدالة عند اي نقطة x في محيط النقطة x_0 تعطى بالعلاقة

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

حيث:

$f^{(n)}(x_0)$: المشتقة رقم (n-th derivative) للدالة $f(x)$ عند النقطة $x = x_0$

اي :

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=x_0}$$

h: بعد النقطة x عن النقطة $h = x - x_0$

R_n: الحد المتبقي (remainder term) وهو يصف مقدار الخطأ الناتج عن استخدام عدد محدود من الحدود (truncation error) وقيمته هي:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

حيث ξ هي نقطة ما موجودة بين النقطتين x و x_0

ومن المعادلة الاخيرة والتي تصف الحد المتبقي R_n يصبح واضحاً ان مقدار الخطأ بتقدير قيمة الدالة عند النقطة x يكون قليلاً كلما:

1- كان البعد بين النقطتين x و x_0 (قيمة h) قليلاً.
2- كلما كان عدد الحدود المستخدمة لتقدير قيمة الدالة اكبر (زادت قيمة n)

ملاحظة: عند فرض قيمة $x_0 = 0$ في متسلسلة تايلور، ينتج متسلسلة جديدة تسمى متسلسلة Maclaurin

مثال: اكتب متسلسلة تايلور (Taylor's Series) للدالة $f(x) = e^x$ حول النقطة $x_0 = 0$

الحل: الصيغة العامة لمتسلسلة تايلور هي:

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

للدالة $f(x) = e^x$ عند النقطة $x_0 = 0$ فأن:

$$f(x) = f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = f''(x) = \cdots f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1$$

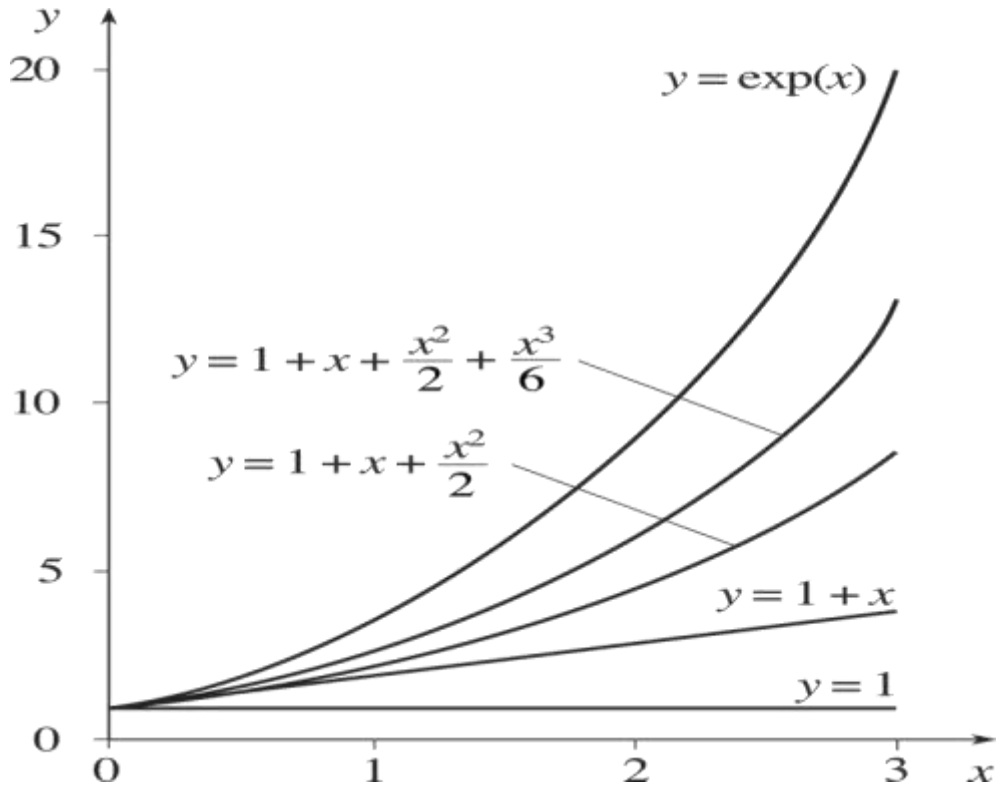
وكذلك $h = x - x_0 = x - 0 = x$

اي انه، وحول النقطة $x_0 = 0$ فأن:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

والحد المتبقي هو

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}, \quad 0 \le \xi \le x$$



اوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = sin\,(x)$ حول النقطة $x_0 = 0$ ثم جد ال(R_n) $H.W$

الناتج النهائي (الحل)

$$f(x) = sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{(k-1)}x^{(2k-1)}}{(2k-1)!} + R_{2k-1}$$

$$|R_{2k-1}| \leq \frac{|x|^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

اوجد الحدود الثلاث الاولى من متسلسلة تايلور (Taylor's series) للدالة $f(x) = cos(x)$ حول النقطة $x_0 = 0$. H.W

اوجد الحدود الثلاث الاولى من متسلسلة تايلور (Taylor's series) للدالة $f(x) = tan\,(x)$ حول النقطة $x_0 = 0$. H.W