Chapter two

جذور معادلة المتغير واحد

في هذا الفصل سنتعرف على الطرق المستخدمة لإيجاد جذور المعادلة $f(x) = 0$ (اي اصفار الدال $f(x)$)، ثم سنقوم بمقارنة هذه الطرق ببعضها ليسهل عليكم اختيار الطريقة المناسبة.

ايجاد قيم تقريبية لجذور معادلة المتغير الواحد

نستخدم التقنيات العددية لإيجاد جذور المعادلة $f(x) = 0$ فأنه من الضروري معرفة قيم تقريبية لتلك الجذور اوعلى الاقل الفترات التي توجد فيها تلك الجذور. ومن اهم الطرق العددية لمعرفة القيم التقريبية لجذور المعادلة $f(x) = 0$ هي:

بناء جدول يبين العلاقة بين قيم المتغير x وقيم الدالة والبحث عن الفترات التي غيرت فيها هذه الدالة اشارتها، حيث ان جذور المعادلة $f(x) = 0$ ستكون (وحسب نظرية القيمة الوسيطة) موجودة في تلك الفترات.

مثال: اوجد القيمة التقريبية لجذر المعادلة $cos\ (2x) - x = 0$

الحل: نعيد كتابة الدالة بالصيغة $cos\ (2x) = x$، ومن معرفة ان

$$|\,cos\ (2x)| \leq 1$$

ومن هنا نستنتج ان جذر هذه المعادلة يقع في الفترة $[-1,1]$. وبتقسيم هذه الفترة الى عدد من فترات جزئية (عشر فترات مثلا) ودراسة اشارة الدالة $f(x) = cos\ (2x) - x$ عند حدود كل من هذه الفترات يمكن معرفة الفترات الجزئية التي يوجد بها جذر المعادلة. فمثلا بتقسيم الفترة $[-1,1]$ الى مجموعة من الفترات الجزئية طول كل منها يساوي 0.2 ، ودراسة اشارة الدالة عند حدود هذه الفترات، نحصل على الجدول التالي:

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	0.2-	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f(x)	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-

بما ان الدالة غيرت اشارتها في الفترة $[0.4, 0.6]$ وباستخدام نظرية القيمة الوسيطة، نستنتج ان جذر هذه الدالة يقع في هذه الفترة.

الان سوف نقوم بدراسة الطرق التي نستطيع بواسطتها ايجاد قيمة دقيقة (وبقيمة خطأ معروفة مسبقاً لهذا الجذر او الجذور) وهذه الطرق هي:

1- طريقة تنصيف الفترة (The Bisection Method)

هذه الطريقة، والتي تسمى ايضاً (The Binary-search method) تستخدم نظرية القيمة الوسيطة The (Intermediate-Value theorem) والتي تم شرحها مسبقاً في الفصل الاول والتي تنص على انه اذا كانت الدالة $f(x)$مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وكان K عدداً محصوراً بين القيمتين $f(a)$ و $f(b)$ اي ان $f(a) \leq K \leq f(b)$، فأن هناك نقطة مثل c في الفترة المفتوحة (a, b) بحيث ان $f(c) = K$.

كحالة خاصة من هذه النظرية، ففي حال كون اشارتي القيمتين $f(a), f(b)$ مختلفتين (اي ان $f(a).f(b) < 0$) فان هناك جذر واحد على الاقل للمعادلة $f(x) = 0$ في الفترة (a, b)

خطوات ايجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة تنصيف الفترة (Bisection method) هي:

- ايجاد حدود الفترة $[a, b]$ التي تتغير اشارة الدالة $f(x)$عند طرفيها باستخدام جدول يحتوي على قيم x و $f(x)$
- حساب قيمة c التي تنصف الفترة $[a, b]$ اي:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

- حساب قيمة الدالة عند النقطة c، اي حساب قيمة $f(c)$ هناك احتمالين هما:
  1- ان تكون $f(c) = 0$، اي ان جذر هذه المعادلة يساوي c .
  2- ان تكون $f(c) \neq 0$، في هذه الحالة فأن هناك احتمالين، هما:

(A) ان تكون $f(a).f(c) < 0$، اي ان الدالة $f(x)$ قد غيرت اشارتها في الفترة $[a, c]$، وهذا يدل على ان جذر المعادلة يقع في هذه الفترة.

(B) ان تكون $f(a).f(c) > 0$، وهذا يدل على ان الدالة $f(x)$ لم تغير اشارتها في الفترة $[a, c]$، اي ان جذر المعادلة لا يقع في هذه الفترة وانما في الفترة $[c, b]$

نستمر بتنصيف الفترة التي فيها جذر المعادلة حتى نصل الى الدقة المطلوبة.

عيوب طريقة التنصيف

هذه الطريقة بطيئة نوعاً ما اذ انه وبعد تكرار استخدام الخطوات المذكورة في خوارزمية هذه الطريقة n عدد من المرات، فان طول الفترة التي يوجد فيها جذر المعادلة سيكون

$$\frac{b-a}{2^n}$$

يمكن استخدام معايير (**criterion**) مختلفة لإيقاف تكرار خطوات هذه الطريقة وهي:

1) ان يكون عدد مرات تكرار استخدام خطوات هذه الطريقة (number of iterations) قد تجاوز حدا اعلى من المسموح به.

2) ان يكون الخطأ المطلق في قيمة الجذر الذي تم ايجاده اقل من او يساوي القيمة المسموح بها، اي ان:

$$|c_n - c_{n-1}| < \in$$ حيث ان :

c_n قيمة الجذر الذي تم ايجاده بعد تكرار خوارزمية هذه الطريقة n عدد المرات

$\in$ قيمة الخطأ المطلق المسموح به.

3) ان يكون الخطأ النسبي في قيمة الجذر الذي تم ايجاده اقل او يساوي القيمة المسموح بها، اي ان:

$$\frac{|c_n - c_{n-1}|}{c_n} < R$$

4) ان تكون القيمة المطلقة للدالة اقل من قيمة معينة مسموح بها، اي ان:

$$|f(c_n)| < \varepsilon$$

مثال: اوجد جذر المعادلة والذي يقع في الفترة $[0.5, 0.75]$، مقربا للمنزلة العشرية الرابعة.

الحل: بما ان الدقة المطلوبة هي للمنزلة العشرية الرابعة، فان مقدار الخطأ المطلق المسموح به هو:

$$\varepsilon < 0.5x10^{-4} = 5x10^{-5}$$

للدالة $cos(2x) - x$ وباستخدام طريقة تنصيف الفترة، نحصل على الجدول التالي:

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	c_n	e_n
0	0.5	0.75	+	-	0.625	0.125
1	0.5	0.625	+	-	0.5625	0.0625
2	0.5	0.5625	+	-	0.53125	0.03125
3	0.5	0.53125	+	-	0.51563	0.01562
4	0.5	0.51563	+	-	0.50782	0.00781
5	0.5	0.50782	+	+		
	0.50782	0.51563	+	-	0.51173	0.00391
6	0.50782	0.51173	+	+		
	0.51173	0.51563	+	-	0.51368	0.00195
7	0.51173	0.51368	+	+		
	0.51368	0.51563	+	-	0.51466	$9.8\text{x}10^{-4}$
8	0.51368	0.51466	+	+		
	0.51466	0.51563	+	-	0.51515	$4.9\text{x}10^{-4}$
9	0.51466	0.51515	+	-	0.51491	$2.4\text{x}10^{-4}$
10	0.51466	0.51491	+	+		
	0.51491	0.51515	+	-	0.51503	$1.2\text{x}10^{-4}$
11	0.51491	0.51503	+	-	0.51497	$6\text{x}10^{-5}$
12	0.51491	0.51497	+	-	0.51494	$3\text{x}10^{-5}$

اي ان جذر هذه المعادلة مقربا للمنزلة العشرية الرابعة هو:

$$0.51494 \pm 3x10^{-5}$$

القيمة التقريبية للجذر بعد الخطوة رقم n هي:

$$c_n = \frac{a_n + b_{\ n}}{2}$$

قيمة الخطأ المطلق في القيمة التقريبية للجذر بعد الخطوة رقم n هي:

$$e_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

نلاحظ ايضا ان عدد ان عدد مرات تكرار الخطوات الازمة للوصول الى دقة معينة في قيمة الجذر يمكن تحديدها من معرفة انه، بعد التكرار رقم n فان طول الفترة التي يوجد ضمنها الجذر هو $\frac{b-a}{2^n}$، وحيث ان طول الفترة التي يوجد ضمنها الجذر يساوي ضعف الخطأ المطلق في قيمة الجذر، فأن:

$$e_n = \frac{b-a}{2^n} \leq e$$

نحل المعادلة اعلاه بالنسبة ل n لنحصل على

$$\frac{b-a}{\mathrm{e}} \leq 2^n$$

وبأخذ ال log للطرفين نحصل على

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\mathrm{e}}\right)}{\log(2)}$$

ففي المثال السابق، حيث ان:

$$b = 0.75$$

$$a = 0.5$$

$$e \leq 5x10^{-5}$$

فأن:

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{0.75-0.5}{5x10^{-5}}\right)}{\log(2)} = 12.287$$

اي ان:

$$n = 12$$

2- طريقة النقطة الثابتة **(The fixed point theorem)**

فكرة هذه الطريقة هي كتابة المعادلة $f(x) = 0$ بصيغة النقطة الثابتة $g(x) = x$ ثم نبحث عن النقطة الثابتة للدالة g والتي هي نفسها صفر الدالة $f.$

خطوات الحل:

1. نكتب المعادلة $f(x) = 0$ بالصيغة $g(x) = x$
2. نجد الفترة التي تمتلك الدالة $f(x)$ فيها حلا، وذلك باستخدام نظرية القيمة الوسيطة ولتكن قيمة الجذر التقريبية هي x_0مثلا.
3. نعوض القيمة التقريبية x_0 في الطرف الايسر من المعادلة (في الدالة $g(x) = x$ $g(x)$) لنجد القيمة التقريبية التالية x_1، اي ان

$$x_1 = g(x_0)$$

4- نعوض قيمة ال x_1 مرة اخرى لإيجاد القيمة التقريبية التالية، اي ان:

$$x_2 = g(x_1)$$

1- نستمر بتكرار هذه الخطوة حتى نحصل على $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ او $|f(x_n)| < \varepsilon$

ملاحظة: قيمة ال x_0 في الدالة $g(x)$ تساوي صورتها، اي ان: $x_0 = g(x_0)$ ، فمثلا للدالة $g(x) = x + sin\,(\pi . x)$، فأن $x_0 = 0$ هي نقطة ثابتة لهذه الدالة ، لان: $g(0) = 0$ اي ان $x_0 = g(x_0)$
وكذلك $x_1 = 1$ هي ايضا نقطة ثابتة لهذه الدالة لان: $g(1) = 1 + sin\,(\pi) = 1$، اي انه ايضا: $x_1 = g(x_1)$

ملاحظة: يمكن كتابة المعادلة $f(x) = 0$ بصور مختلفة للصيغة $x = g(x)$، فمثلا المعادلة $cos\,(2x) - x = 0$، يمكن كتابتها بالعديد من الصيغ، منها:

$$x = \cos(2x),$$

or $x = \frac{\cos^{-1}(x)}{2}$

or $x = \frac{\cos(2x)+x}{2}$

ولكن ليس كل هذه الصيغ يمكن ان نحصل منها على جذر المعادلة $f(x) = 0$. وسنتعرف لاحقا على كيفية معرفة الصيغة التي تنتج جذر المعادلة $f(x) = 0$.

مثال: باستخدام طريقة النقطة الثابتة (fixed point method)، اوجد جذر المعادلة $cos\,(2x) - x = 0$، الذي يوجد في الفترة $[0.5, 0.75]$

الحل: من المعادلة $cos\,(2x) - x = 0$ يمكن الاستنتاج ان:

1- $x = \cos(2x) = g_1(x)$

2- $x = \frac{\cos^{-1}(x)}{2} = g_2(x)$

من الواضح انه لدينا اكثر من صورة لمثيل صيغة النقطة الثابتة ولكن صيغة واحدة فقط هي التي تعطينا جذر الدالة $f(x) = 0$. صيغة التكرار (iterative formula) التي سيتم استخدامها للوصول الى الجذر هي:

1- $x_{n+1} = \cos(2x_n)$

2- $x_{n+1} = \frac{\cos^{-1}(x_n)}{2}$

يمكن اختيار قيمة مبدئية (starting value) من داخل الفترة التي يوجد فيها الجذر، فمثلا نقوم بتنصيف الفترة [0.5، 0.75] للحصول على $x_0 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.6$

الجدول ادناه يبين كيفية اختيار الصيغة المناسبة للوصول الى جذر الدالة (صفر الدالة):

n	x_n	$g(x_n) = \cos(2x)$	n	x_n	$g(x_n) = \dfrac{\cos^{-1}(x)}{2}$
0	0.6	$x_1 = \cos(2 \times 0.6) = 0.3624$	0	0.6	$x_1 = \dfrac{\cos^{-1}(0.6)}{2}$ = 0.46365
1	0.3624	$x_2 = \cos(2 \times 0.3624) = 0.7486$	1	0.46365	$x_2 = \dfrac{\cos^{-1}(0.46365)}{2}$ = 0.54434
2	0.7486	$x_3 = \cos(2 \times 0.7486) = 0.0735$	2	0.54434	$x_3 = \dfrac{\cos^{-1}(0.54434)}{2}$ = 0.4976
3	0.0735	$x_4 = \cos(2 \times 0.0735) = 0.9892$	3	0.4976	$x_4 = \dfrac{\cos^{-1}(0.4976)}{2}$ = 0.52499
4	0.9892	$x_5 = \cos(2 \times 0.9892) = -0.3964$	4	0.52499	$x_5 = \dfrac{\cos^{-1}(0.52499)}{2}$ = 0.50905
5	-0.3964	$x_6 = \cos(2 \times -0.3964) = 0.7019$	5	0.50905	$x_6 = \dfrac{\cos^{-1}(0.50905)}{2}$ = 0.51836

من قيم الصيغتين في الجدول، نلاحظ ان في حالة استخدام الصيغة $g(x_n) = \cos(2x_{n-1})$

لا يمكن ان نصل الى القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ وان اغلب القيم التي حصلنا عليها باستخدام هذه الصيغة تقع خارج الفترة، لذا نهمل الصيغة $x = \cos(2x)$ ونعتمد الصيغة $x = \frac{\cos^{-1}(x)}{2}$

نلاحظ ان هذه الطريقة لتحديد الصيغة المناسبة مطولة لذلك سوف نعتمد على النظرية الاتية لتحديد اي من الصيغ نعتمد:

نظرية: اذا كانت $g(x)$ مستمرة في الفترة $[a,b]$ ، فأن للدالة $g(x)$ نقطة ثابتة في الفترة $[a,b]$ اذا كانت هناك $K,\ 0 < K < 1$ بحيث

$$|g'(x)| \leq K < 1$$

في المثال السابق

$$g(x) = \frac{\cos^{-1}(x)}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(0.75) = \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-(0.75)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}, \qquad \left|g'(0.75)\right| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad K = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\left|g'(x)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{7}} < 1$$