الطرق التكرارية لحل انظمة المعادلات الخطية

لحل النظام الخطي

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

نستخدم طريقتين عدديتين وهما:

1. طريقة جاكوبي (Jacobi method)
2. طريقة غاوس- سيدل (Gauss-Seidel method).

1- طريقة جاكوبي (Jacobi method)

تشبه هذه الطريقة اسلوب النقطة الثابتة (fixed point) (g(x)=x) لحل النظام AX=B

خطوات الحل باستخدام هذه الطريقة هي:

1- ترتيب المعاملات بحيث نضع اكبر قيمة مطلقة لمعاملات x_1 بالصف الاول ولمعاملات x_2 في الصف الثاني وهكذا...

2- من المعادلة الاولى نجد x_1 ومن المعادلة الثانية نجد x_2 وهكذا

لذا يمكن اعاده كتابة النظام (1) بالشكل:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n)]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)]$$

.

.

.

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})]$$

وحسب اسلوب طريقة النقطة الثابتة $x = g(x)$، ولدينا معطى

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \\ . \\ . \\ . \\ x_n{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

فتكون صيغة التكرار لطريقة جاكوبي هي:

$$x_1{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - (a_{12}x_2{}^{(k)} + a_{13}x_3{}^{(k)} \dots + a_{1n}x_n{}^{(k)})]$$

$$x_2{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - (a_{21}x_1{}^{(k)} + a_{23}x_3{}^{(k)} \dots + a_{2n}x_n{}^{(k)})]$$

$$x_3{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - (a_{31}x_1{}^{(k)} + a_{32}x_2{}^{(k)} \dots + a_{3n}x_n{}^{(k)})]$$

.

.

.

$$x_n{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - (a_{n1}x_1{}^{(k)} + a_{n2}x_2{}^{(k)} \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k)})]$$

مثال: باستخدام طريقة جاكوبي اوجد حل النظام الخطي التالي:

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1$$

$$-3x_1 + 9x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 - 7x_3 = 3$$

بحيث تكون القيم متماثلة لقيمتين اثنين من التكرارات

الحل: من المعادلة الاولى نجد x_1 ومن الثانية نجد x_2 وهكذا

$$x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3$$

$$x_2 = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_3$$

$$x_3 = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2$$

$at\ k = 0$ (التكرار الاول)

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_2^{(0)} - \frac{3}{5}\ \ x_3^{(0)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(0) - \frac{3}{5}\ (0) = -0.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}x_1^{(0)} - \frac{1}{9}x_3^{(0)} \quad = \frac{2}{9} + \frac{3}{9}(0) - \frac{1}{9}(0) \quad = 0.222$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(0)} - \frac{1}{7}\ \ x_2^{(0)} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}(0) - \frac{1}{7}\ (0) = 0.429$$

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
x_1	*0*	*-0.200*	*0.146*	*0.192*	*0.185*	*0.185*	*0.186*	*0.186*
x_2	*0*	*0.222*	*0.203*	*0.329*	*0.332*	*0.329*	*0.331*	*0.331*
x_3	*0*	*0.429*	*0.517*	*-0.416*	*-0.421*	*-0.424*	*-0.423*	*-0.423*

$$x_1 = 0.186, x_2 = 0.331, x_3 = -0.423$$

مثال2: باستخدام طريقة جاكوبي اوجد حل النظام الخطي التالي:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$$

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

بحيث يكون الخطأ النسبي لكل من المتغيرات اقل من $5x10^{-4}$. استخدم القيم المبدئية $X^{(0)} = \mathbf{0}$

الحل:

اولا: نعيد ترتيب المعادلات بالشكل التالي:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8$$

ثانيا: من المعادلة الاولى نجد x_1 ومن الثانية نجد x_2 وهكذا

$$x_1 = \frac{1}{10}[12 - (x_2 + x_3)]$$

$$x_2 = \frac{1}{5}[10 - (4x_1 + x_3)]$$

$$x_3 = \frac{1}{5}[8 - (x_1 + 2x_2)]$$

$at\ k = 0$ (التكرار الاول)

$$x_1{}^{(1)} = \frac{1}{10}\left[12 - \left(x_2{}^{(0)} + x_3{}^{(0)}\right)\right] = \frac{1}{10}[12 - (0 + 0)] = 1.2$$

$$x_2{}^{(1)} = \frac{1}{5}\left[10 - \left(4x_1{}^{(0)} + x_3{}^{(0)}\right)\right] = \frac{1}{5}[10 - (0 + 0)] = 2$$

$$x_3{}^{(1)} = \frac{1}{5}\left[8 - \left(x_1{}^{(0)} + 2x_2{}^{(0)}\right)\right] = \frac{1}{5}[8 - (0 + 0)] = 1.6$$

الان لدينا

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(1)} \\ x_2{}^{(1)} \\ x_3{}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

At k=1 (التكرار الثاني)

$$x_1{}^{(2)} = \frac{1}{10}\left[12 - \left(x_2{}^{(1)} + x_3{}^{(1)}\right)\right] = \frac{1}{10}[12 - (2 + 1.6)] = 0.84$$

$$x_2{}^{(2)} = \frac{1}{5}\left[10 - \left(4x_1{}^{(1)} + x_3{}^{(1)}\right)\right] = \frac{1}{5}[10 - (1.2 + 1.6)] = 1.44$$

$$x_3{}^{(2)} = \frac{1}{5}\left[8 - \left(x_1{}^{1} + 2x_2{}^{(1)}\right)\right] = \frac{1}{5}[8 - (1.2 + 2)] = 0.96$$

شرط التوقف

$$\left|x_i{}^{(k+1)} - x_i{}^{(k)}\right| < \epsilon, \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n$$

2- طريقة غاوس- سيدل (Gauss-Seidel method)

طريقة Gauss-Seidel تشبه طريقة Jacobi الفرق في ان طريقة Gauss-Seidel تستخدم النتائج التي نحصل عليها من نفس الخطوة بينما طريقة جاكوبي تعود الى الخطوة السابقة في حساب النقطة الجديدة.

فتكون صيغة التكرار لطريقة Gauss-Seidel هي:

$$x_1{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - (a_{12}x_2{}^{(k)} + a_{13}x_3{}^{(k)} \dots + a_{1n}x_n{}^{(k)})]$$

$$x_2{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1{}^{(k+1)} + a_{23}x_3{}^{(k)} \dots + a_{2n}x_n{}^{(k)})]$$

$$x_3{}^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}[b_3 - (a_{31}x_1{}^{(k+1)} + a_{32}x_2{}^{(k+1)} \dots + a_{3n}x_n{}^{(k)})]$$

.

.

.

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}[b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})]$$

ملاحظة: في كلا الطريقتين Jacobi و Gauss-Seidel في الخطوة الاولى نقوم بترتيب المعادلات.

مثال: نقوم بإعادة حل المثال السابق باستخدام طريقة Gauss-Seidel

الحل:

$$x_1 = \frac{1}{10}[12 - (x_2 + x_3)]$$

$$x_2 = \frac{1}{5}[10 - (4x_1 + x_3)]$$

$$x_3 = \frac{1}{5}[8 - (x_1 + 2x_2)]$$

At $k = 0$ (التكرار الاول)

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}[12 - (x_2^{(0)} + x_3^{(0)})] = \frac{1}{10}[12 - (0 + 0)] = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}[10 - (4x_1^{(1)} + x_3^{(0)})] = \frac{1}{5}[10 - (4(1.2) + 0)] = 1.04$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}[8 - (x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)})] = \frac{1}{5}[8 - (1.2 + 2(1.04))] = 0.944$$

At k=1 (التكرار الثاني)

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}[12 - (x_2^{(1)} + x_3^{(1)})] = \frac{1}{10}[12 - (1.04 + 0.944)] = 1.0016$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}[10 - (4x_1^{(2)} + x_3^{(1)})] = \cdots$$

$$x_3{}^{(2)} = \frac{1}{5}\left[8 - \left(x_1{}^{(2)} + 2x_2{}^{(2)}\right)\right] = \cdots$$

شرط التوقف

$$\left|x_i{}^{(k+1)} - x_i{}^{(k)}\right| < \epsilon, \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n$$

سؤال : (واجب)

باستخدام طريقة Jacobi وطريقة Gauss-Seidel، اوجد حل النظام الخطي التالي:

$$10x_1 + x_2 = 12$$

$$x_1 + 10x_2 = 21$$

استخدم القيم المبدئية $x_1{}^{(0)} = x_2{}^{(0)} = 0$، $(\epsilon = 5x10^{-4})$

Norm vector

Def:- Norm vector is a function $\|.\|: R^n \to R$ such that

1- $\|X\| \geq 0$

2- If $\|X\| = 0 \ \to X = 0$

3- $\|a.X\| = |a|.\|X\|$

4- $\|X+Y\| = \|X\| + \|Y\|, \ \forall \, X, Y \ \in \ R^n, \ a \in R.$

Let $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$

$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \equiv L_1$

(مجموع القيم المطلقة لمركبات المتجة)

$$\|X\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} \equiv L_2$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max(|x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_n|) \equiv L_\infty$$

مثال: المتجة $X = (-1, 1, 2)^T$ في R^3 يمتلك الاطوال

$$\|X\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 \ldots (x_n)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 \ldots (2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i| = \max(|x_1|, \ |x_2|, \ |x_3|)$$

$$= \max(|-1|, \ |1|, \ |2|) = 2$$

Def: If A is nxn matrix, then the norm of the matrix is defined by

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

مثال: افرض المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$، اوجد الاطوال (norms)

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |2| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |5| + |-1| + |1| = 7$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}\left(\sum_{j=1}^{3} |a_{ij}|\right) = \max\,(4,4,7) = 7$$

ملاحظة: يمكن استخدام ال (norm) كشرط توقف، اي ان

$$\|\,.\,\|_2 < \varepsilon$$

ملاحظة: (شرط التقارب بطريقتي جاكوبي وكاوس سيدل)

الشرط الكافي لتقارب طريقتي جاكوبي وكاوس سيدل لحل نظام خطي (AX=B) هو ان تكون مصفوفة المعادلات A ذات قطر سائد تام (strictly diagonal dominant) بمعنى ان القيم المطلقة للعناصر في القطر الرئيسي اكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية العناصر في نفس المصفوفة.

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad \forall\, i = 1,2,\dots,n$$

مثال: المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ تعتبر ذات قطر سائد تام لان

$$|-13| > |2| + |5| = 7$$

$$|-5| > |4| + |0| = 4$$

$$|9| > |6| + |2| = 8$$

$\therefore$ A is strictly diagonal dominant matrix.

هذا الشرط كافي لاكنه غير ضروري بمعنى اذا كانت الطريقة متقاربة فليس من الضروري ان تكون المصفوفة A ذات قطر سائد تام.

ملاحظة: شرط كافي وليس ضروري يعني:-

اذا تحقق الشرط فيجب ان تكون الطريقة متقاربة اما اذا كانت الطريقة متقاربة فليس من الضروري ان تكون المصفوفة ذات قطر سائد تام.

مثال: المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -10 \end{bmatrix}$ ليست ذات قطر سائد لان

$$|2| > |-1|$$

$$|-10| < |11|$$

C is not strictly dominant.

مثال: باستخدام Jacobi method اوجد حل النظام الخطي التالي:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

بحيث يكون الخطأ النسبي لكل من المتغيرات اقل من 10^{-5}. استخدم القيم المبدئية $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

الحل: نرتب المعادلات بالشكل التالي:

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1{}^{(k+1)} = \frac{1}{3}(13 - x_2{}^{(k)} - x_3{}^{(k)})$$

$$x_2{}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(4 - x_1{}^{(k)} + x_3{}^{(k)})$$

$$x_3{}^{(k+1)} = 9 - x_1{}^{(k)} - x_2{}^{(k)}$$

$$x_1{}^{(1)} = \frac{1}{3}\left(13 - x_2{}^{(0)} - x_3{}^{(0)}\right) = \frac{1}{3}(13 - 0 - 0) = \frac{13}{3}$$

$$x_2{}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(4 - x_1{}^{(0)} + x_3{}^{(0)}\right) = \frac{1}{2}(4 - 0 + 0) = 2$$

$$x_3{}^{(1)} = 9 - x_1{}^{(0)} - x_2{}^{(0)} = 9 - 0 - 0 = 9$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right\|_2$$

$$\sqrt{(\frac{13}{3})^2 + (2)^2 + (9)^2} = 10.18713 > 10^{-5}$$

$$x_1{}^{(2)} = \frac{1}{3}\left[13 - x_2{}^{(1)} - x_3{}^{(1)}\right] = \frac{1}{3}[13 - 2 - 9] = 0.6667$$

$$x_2{}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[4 - x_1{}^{(1)} + x_3{}^{(1)}\right] = \frac{1}{2}\left[4 - \frac{13}{3} + 9\right] = 4.3333$$

$$x_3{}^{(2)} = 9 - x_1{}^{(1)} - x_2{}^{(1)} = 9 - \frac{13}{3} - 2 = 2.6667$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.6667 \\ 4.3333 \\ 2.6667 \end{pmatrix}$$

$$\left\|X^{(2)} - X^{(1)}\right\|_2 = 2.304 > \in$$

نستمر بنفس الخطوات السابقة لحساب $X^{(3)}$ لنحصل على

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \left\|X^{(3)} - X^{(2)}\right\|_2 = 0.23093x10^{-14} < \in = 10^{-5}$$

مثال: جد التكرارات الاربعة الاولى للنظام الخطي التالي باستخدام Gauss-Seidel method

$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$

باستخدام متجة القيم الابتدائية $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

الحل: نرتب المعادلات بالشكل التالي

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$

$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

$$x_1{}^{(k)} = \frac{1}{4}\left[24 - 3x_2{}^{(k-1)}\right]$$

$$x_2{}^{(k)} = \frac{1}{4}[30 - 3x_1{}^{(k)} + x_3{}^{(k-1)}$$

$$x_3{}^{(k)} = \frac{1}{4}[-24 + x_2{}^{(k)}]$$

$$x_1{}^{(1)} = \frac{1}{4}\left[24 - 3x_1{}^{(0)}\right] = \frac{1}{4}[24 - 3(1)] = \frac{21}{4} = 5.25$$

$$x_2{}^{(1)} = \frac{1}{4}[30 - 3x_1{}^{(1)} + x_3{}^{(0)} = \frac{1}{4}[30 - 3(5.25) + 1] = 3.8125$$

$$x_3{}^{(1)} = \frac{1}{4}\left[-24 + x_2{}^{(1)}\right] = \frac{1}{4}[-24 + 3.8125] = -5.046375$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5.25 \\ 3.8125 \\ -5.046375 \end{pmatrix}$$

.

.

.

$$X^{(7)} = \begin{pmatrix} 3.013411 \\ 3.988241 \\ -5.002794 \end{pmatrix}$$

الحل الدقيق $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$