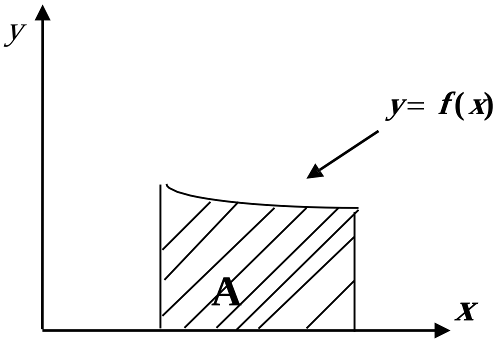
الفصل الخامس

التكامل العددي Numerical Integration

من التطبيقات الشائعة للطرق العددية هو استعمالها في حساب التكامل المحدد أو ما يعبر عن المساحة تحت المنحنيات:



أي أن :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

يتم اللجوء إلى التكامل العددي عندما تكون هناك صعوبة وأحيانا استحالة في إيجاد قيمة التكامل للدالة بالطرق التحليلية المعتادة على سبيل المثال:

$$\int e^{x^2} dx, \int \sqrt{\sin x}\, dx, \int \frac{1}{2+\cos x} dx$$

أو عندما يكون التكلمل معرف بمجموعة قيم يشكل جدول مثل جدول قراءات مختبريه لتجربة معينة وكما هو الحال في الجدول الأتي لبيان سرعة جسم ساقط مع الزمن:

الزمن	السرعة
0.1	**2.443**
0.2	**3.446**
0.3	**4.004**
.	**.**
.	**.**
1.0	**10.230**
1.2	**12.006**

فعند حساب المسافة المقطوعة من قبل الجسم يجب حساب تكامل السرعة مع الزمن هكذا:

$$i.e\, v = \frac{ds}{dt}\, or\, s = \int v dt$$

وهنا نجد أن السرعة معرفة في الجدول أعلاه.

ومن أهم طرق التكامل التي يمكن التطرق إليها هي:

أ) طريقة شبه المنحرف **Trapezium method**

نستعمل أولا صيغة نيوتن التقدمية للاندراج وتكاملها على الفترة $[x_0, x_1]$ (الفترة $[0,1]$ بالنسبة إلى t) فنحصل على

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\int_0^1 [f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots]$$

$$= h[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2)\Delta^2 f_0 + (\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2)\Delta^3 f_0 + \cdots]$$

أي أن:-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\,[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

في المتسلسلة اللامنتهية (1) إذا أهملت الحدود في الفروقات الثانية وما بعدها نحصل على الصيغة:-

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وهي صيغة شبه المنحرف للتكامل العددي. حيث وكما هو واضح فان الدالة *f(x)* تقترب إلى الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)))$ فتكون قيمة التكامل مساوية إلى مساحة شبه المنحرف المتكون بعد التقريب. إن خطا البتر في الصيغة (2) يساوي

$$T = \frac{-h}{12}\Delta^2 f_0 + \cdots = \frac{-h^3}{12} f''(\theta).\,\theta_\varepsilon(x_0, x_1)$$

واعتماده على المشتقة للدالة f يعني أن طريقة شبه المنحرف تعطي نتيجة خالية من خطا البتر عندما تكون الدالة f عبارة عن متعددة حدود بدرجة 1 أو اقل.

عند تعميم الصيغة (2) على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ نحصل على:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \frac{h}{2}\,(f_{i-1} + f_i) \ldots\ldots.(2)$$

وبذلك يصبح

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \sum_{i-1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

اي ان :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{n-1}) + f_n] \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

والتي تسمى بطريقة شبه المنحرف المركبة.

أمثلة:-

1. حل التكامل التالي عدديا $f(x) = \int_0^4 e^x\, dx$ إذا علمت أن n=4 .

الحل:

$$f\ (x) = e^x, f\ (a) = f(0) = e^0 = 1, f(b) = f(4) = e^4 = 54.598$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$x_{i+1} = x_i + h \; or \; x_{i+1} = x_0 + ih$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow (x_0) = e^0 = 1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (x_1) = (1) = e^1 = 2.71828$$

$$x_2 = x_1 + h = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (x_2) = (2) = e^2 = 7.38906$$

$$x_3 = x_2 + h = 2 + 1 = 3 \Rightarrow (x_3) = (3) = e^3 = 20.08554$$
$$x_4 = x_3 + h = 3 + 1 = 4 \Rightarrow (x_4) = (4) = e^4 = 54.59815$$

$$I = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$
$$I = \frac{h}{2}[(a) + (b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))]$$

$$I = \frac{h}{2}\ [1 + e^4 + 2(e^1 + e^2 + e^3)]$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}[1 + 54.59815 + 2(2.71828 + 7.38906 + 20.08554)]$$
$$I = 57.99187$$

2. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف $\int_0^5 \boldsymbol{sin\, d\, x}$ إذا كانت n=5 .

الحل:

$$\mathbf{h = \frac{5-0}{5} = 1\ ,\ x_0 = 0}$$

$$\mathbf{x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = f(1) = \sin 1 = 0.8414}$$
$$\mathbf{x_2 = x_1 + h = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(x_2) = f(2) = \sin 2 = 0.9092}$$
$$\mathbf{x_3 = x_2 + h = 2 + 1 = 3 \Rightarrow f(x_3) = f(3) = \sin 3 = 0.1411}$$
$$\boldsymbol{x_4 = x_3 + h = 3 + 1 = 4 \Rightarrow f(x_4) = f(4) = sin\, 4 = -0.7568}$$
$$\boldsymbol{x_5 = x_4 + h = 4 + 1 = 5 \Rightarrow f(x_5) = f(5) = sin\, 5 = -0.9589}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}[0 + sin5 + 2(sin1 + sin2 + sin3 + sin4)}$$

$$\boldsymbol{I = [\frac{1}{2}\ [0 + (-0.9589) + 2(0.8414 + 0.9092 + 0.1411 + (-0.7568))]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}[-0.9589 + 1.6828 + 1.8184 + 0.288 - 1.5136]}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}[1.3167]}$$
$$\boldsymbol{= 0.65835}$$

حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف من الجدول التالي

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x)	1	1.56	2.25	3.06	4

الحل:

من الجدول عدد النقاط n=4 مقدار الزيادة h=0.25 a=1 ,b=2

$$I = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

$$I = \frac{h}{2}[(a) + (b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))]$$

$$\text{I}=\frac{h}{2}[[1 + 4 + 2(1.56 + 2.25 + 3.06)] = 2.3437$$

4. حل التكامل التالي عدديا بطريقة شبه المنحرف $\int_0^4 (2 - x^2)\, d\,x$ إذا كانت n=8 .