Numerical Analysis التحليل العددي

<u>مفردات المنهج</u>

1. الاخطاء **Errors**
2. الحلول العددية لأنظمة المعادلات الخطية **Numerical solutions of linear systems**
3. الحلول العددية للمعادلات اللاخطية **Numerical solutions of nonlinear equations**
4. التحليل الداخلي **interpolation**
5. التفاضل والتكامل العددي **Numerical Differentiation and Integration**
6. الحلول العددية للمعادلات التفاضلية **Numerical Solutions of Differential Equations**

<u>الحل العددي :</u> هو حل ناتج من اجراء سلسلة عدة خطوات وغالبا ما يحتوي على اخطاء.

<u>التحليل العددي:</u> هو العلم الذي يهتم بدراسة الطرائق المستخدمة للإيجاد الحلول العددية (التقريبية) والنظريات المتعلقة بها لمسائل مختلفة من العلوم التطبيقية الصرفة كالرياضيات

<u>فائدة التحليل العددي:</u> يستخدم التحليل العددي لإيجاد الحلول لكثير من المسائل الرياضية التي يصعب ايجاد الحلول لها بالطرق الاعتيادية او استحالة ايجاد حلها المطلق.

<u>الخطأ :</u> هو الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة المطلقة (المضبوطة) لمسألة معينة والذي يسمى ايضا بالخطأ المطلق

Chapter one

1-1انواع الخطأ:

1. الخطأ المطلق Absolute error :

هو الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية (القيمة المضبوطة) لمسألة وعينة ويأخذ الصورة

$$e_x = |x - x_a|$$

- e_x يرمز للخطأ عند القيمة x
- x يمثل الحل المطلق (الحل المضبوط)
- x_a يمثل الحل التقريبي للحل المطلق

2- الخطأ النسبي Relative error :

هو حاصل قسمة الخطأ المطلق الى القيمة المضبوطة ويعرف بالشكل التالي:

a) $R_{e_x} = |\frac{x-x_a}{x}| = \frac{e_x}{|x|}, x \neq 0$ (في حالة القيمة المضبوطة x معرفة)

b) $R_{e_x} = |\frac{x-x_a}{x_a}| = \frac{e_x}{|x_a|}$, $x_a \neq 0$ (في حالة القيمة المضبوطة x غير معرفة)

س/ ما الفرق بين الخطأ المطلق والخطأ النسبي؟

ج/ الخطأ المطلق هو حجم الفرق بين القيمة الدقيقة والتقريب، الخطأ النسبي هو الخطأ المطلق مقسم على مقدار القيمة الدقيقة، الخطأ في المئة هو الخطأ النسبي معبر عنه لكل مئة. مثلا، إذا كانت القيمة الدقيقة 50 والتقريب 49,9 إذا فالخطأ المطلق هو 0,1 والخطأ النسبي 50/0.1 = 0,002

س/ متى نستخدم صيغة الخطأ المطلق او صيغة الخطأ النسبي؟

ج/ عندما تكون قيمة ال x صغيرة، مثلا $x = 0.0007$ او $x = 0.0008$ فمن الافضل استخدام صيغة الخطأ المطلق للحفاض على مقدار الخطأ صغيرا (عندما تكون قيمة ال x بعيدة عن الواحد). نستخدم صيغة الخطأ النسبي عندما تكون قيمة ال x كبيرة (قريبة من الواحد) للحصول على قيمة صغيرة للخطأ.

مثال: (استخدام صيغة الخطأ المطلق والخطأ النسبي)

(1) اذا كانت $\boldsymbol{x = 0.0004\,,\ ,x_a = 0.0005}$

$e_x = |x - x_a| = |0.0005 - 0.0004| = 0.0001 \quad \leftarrow$ قيمة صغيرة

$$R_{e_x} = \frac{e_x}{|x|} = \frac{0.0001}{0.0004} = 0.25 \leftarrow \text{قيمة كبيرة}$$

الخطأ المطلق افضل من الخطأ النسبي لان قيمة ال x المعطاة صغيرة.

(2) اذا كانت $\boldsymbol{x_a = 1050,\ \ x = 1000}$

$$e_x = |x - x_a| = |1050 - 1000| = 50 \quad \leftarrow \text{قيمة كبيرة}$$

$$R_{e_x} = \frac{e_x}{|x|} = \frac{50}{1000} = 0.05 \leftarrow \text{قيمة صغيرة}$$

الخطأ النسبي افضل من الخطأ المطلق لان قيمة ال x كبيرة جدا.

(3) **اذا كانت** $\boldsymbol{x_a = 0.98\ \ x = 0.99}$

$$e_x = |x - x_a| = |0.99 - 0.98| = 0.01,\ R_{e_x} = \frac{e_x}{|x|} = \frac{0.01}{0.98} = 0.01.$$

لا يوجد فرق بين الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

ملاحظة : اذا كانت القيمة التقريبية معرفة x_a ومقدار الخطأ المطلق δ ، فأن قيود القيمة الحقيقية ل xهي :

$$|x - x_a| \le \delta$$

$$-\delta \le x - x_a \le \delta \to \ \ x_a - \delta \le x \le x_a + \delta$$

مثال :جد قيود القيمة الحقيقية للعدد x اذا علمت ان القيمة التقريبية $x_a = 2.142$ وبخطأ مقداره 0.001

الحل: $|x - x_a| \le \delta \Rightarrow \qquad |x - 2.142| \le 0.001$

$\Rightarrow\ \ -0.001 \le x - 2.142 \le 0.001$. Then $2.141 \le x \le 2.143$

اذن القيمة الحقيقية ل x تقع في الفترة المغلقة $[2.141, 2.143]$

2-1 تمثيل الاعداد

- **النظام العشري :** يتم تمثيل اي عدد في صيغة النظام العشري بالشكل التالي

$$x = (a_n . a_{n-1} \dots a_1 . a_0 . b_1 . b_2 \dots)_{10}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \quad a_k . 10^k + \sum_{k=1}^{\infty} \quad b_k . 10^{-k}$$

الفاصل بين جزء العدد الصحيح والجزء العشري

- يتم تمثيل أي عدد في صيغة النظام الثنائي بالشكل التالي

$$x = (a_n . a_{n-1} \dots a_1 . a_0 . b_1 . b_2 \dots)_2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \quad a_k . 2^k + \sum_{k=1}^{\infty} \quad b_k . 2^{-k}$$

الفاصل بين جزء العدد الصحيح والجزء العشري

- يتكوّن النظام العشريّ من تسلسل الأرقام المعتادة، وهي العشرةُ أرقام من 0 إلى 9 كالآتي :

1. التسلسل هو 9876543210
2. لاستكمال التسلسل يتمّ إضافة 1 إلى آخر رقم وهو 9، فتتحوّل إلى 0، ثمّ نبدأ التسلسل من جديد، فيكون الشكل 10876543210
3. لاحظ أنّه اختفى الرقم 9 ليحلّ محلّه الرقم 0، ثمّ يبدأ العد 1، 2، وهكذا
4. فتكون قاعدة العدّ العشريّ هي أنّها تتكوّن من حِزم أيضًا، ولكنّ الحِزمة الواحدة تتكوّن من عشرة أرقام، وللانتقال إلى الحِزمة الثانية تتمّ إضافة (1) إلى الرقم الأخير بالحِزمة وهو رقم (9)، فتتحوّل إلى (10)، وبذلك يختفي الرقم (9) ليحل محلّه الرقم (0)، مع إضافة الرقم (1) لتبدأ به الحزمة الجديدة وهكذا .

- **النظام الثنائي:** نلاحظ من الشكل التالي:

10 10 11 100 101 110 111

1- أنّ النظام لا يتكوّن إلّا من رقمين فقط، هما الصفر والواحد.
2- يعتمد النظام على خانتين فقط، الاولى والثانية، ثم يتم تكرارهما على هيئة حزم وفقا لقاعدة محددة
3- نبدأ الخانة الأولى بالصفر(0)، ثمّ الخانة الثانية بالواحد (1)، ثمّ نقوم بإضافة واحد مكان الصفر(11)، ثمّ نقوم بإصافة واحد بجانب الرقم شمالًا بعد أن نجعل العددين الأوّلين أصفارًا (100)، وعند إعادة التكرار نعيد الكرّة، فنجعل الصفر الأوّل واحد (101)، ثمّ نجعل الواحد صفرًا (110)، وإضافة واحد مكان الصفر الثاني، ثمّ نجعل الصفر الأوّل واحد (111) مرّة أخرى، وهكذا
4- نضيف واحد على الصفر، فيكون الناتج واحد (1) (حزمة ثانية "10")، ثمّ نضيف واحد على صفر الحِزمة الثانية، فيكون الناتج واحد، واحد، (11) في (حِزمة ثالثة)، وهكذا عمليّة التكرار للحزم.

تحويل النظام الثنائي الى النظام العشري

لكي ندرك عمليّة التحويل نفرض الشكل (110) ولتحويله إلى نظام عشريّ اتّبع الآتي:

1. ضع الشكل (110) في صف أوّل أفقي، كالشكل (1 1 0)
2. ثمّ في الصف الثاني الأفقي ضع العدد 2 تحت كلّ رقم في الشكل (0 1 1)، فيكون رقم (0 تحته 2)، ورقم (1 تحته 2)، ورقم (1 تحته 2)
3. ارفع الرقم (2) إلى قوّة مرتّبة ابتداءً من (0)، وذلك بترتيب وقوعها تحت الشكل (0 1 1)، فتكون 2 الأولى أُس صفر أي2^0 ، و 2الثانية تكون أُس 1 أي تكون2^1 ، و 2الثالثة تكون أُس 2 أي تكون2^2 ، ثمّ احسب ناتج رفع 2 لقوّتها في صفٍّ تالٍ، ويكون شكلها(2^2 2^1 2^0) ، فيكون ناتجها (4 2 1)
4. في الصفّ الثالث أو الرابع حسب تسلسل كتابتك ضع فيه حاصل ضرب ناتج أرقام الصفّ الأخير في أرقام الصفّ الأول، وضعه في صفٍّ تالٍ، كلّ رقم تحته رقمه الناتج عنه، تبعًا لما هو ناتج في الخطوة السابقة، فيكون (1 × 0) ثمّ (2 × 1) ثمّ (4 × 1)، فيكون الناتج0) ،2 ،.((4
5. اجمع أرقام الصفّ الأخير، فيكون الناتج عبارة عن (0 + 2 + 4) فيكون الناتج 6، أي ان الرقم 110 بالنظام الثنائي، يكون هو 6 بالنظام العشري.

مثال : ضع العدد الثنائي 111001 في شكل نظام عشري

الحل

$$2^5 * 1 + 2^4 * 1 + 2^3 * 1 + 2^2 * 0 + 2^1 * 0 + 2^0 * 1 = 111001$$

$$32 * 1 + 16 * 1 + 8 * 1 + 4 * 0 + 2 * 0 + 2^0 * 1 = 57$$

سؤال :حول الاشكال التالية من النظام الثنائي الى النظام العشري

0, 1, 10, 11, 100, 101, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110, 11111, 100000, 1000000, 10000000

تحويل النظام العشري الى النظام الثنائي

هناك أكثر من طريقةٍ للتحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي، ولكنّنا سنتناول الطريقة الأكثر يسرًا، وهي كالمثال الآتي:

حوّل العدد 87 من النظام العشري إلى النظام الثنائي

كلّنا يعلم القسمة المطوّلة، أي نقسم العدد على عدد معيّن ثمّ نكرّر عمليّة القسمة بالنسبة لناتج القسمة، حتّى يتمّ تحليل الرقم كليًا، ولكن في هذه الحالة سوف نقسم على الرقم (2) فقط؛ لأنّ النظام المحوّل إليه ثنائي، أي يحتوي على خانتين فقط كأساسٍ له، وعمومًا تكون عمليّة التحويل كالآتي:

نستمر بقسمة الرقم على 2 ولكن 87 رقم فردي يعني سوف يكون فيه كسر في هذه الحالة سوف نأخذ الرقم الذي قبله ونقسمه على 2

الرقم 87 فردي فسوف نقوم بقسمة اقرب قيمة زوجية وهي 86 على 2 ويبقى معنا1

$86 \div 2 = 43$ ويتبقى 1

الرقم 43 فردي لذلك سوف نقوم بقسمة اقرب قيمة زوجية وهي 42 على 2 ويتبقى 1

$42 \div 2 = 21$ ويتبقى 1

الرقم 21 فردي لذلك سوف نقوم بقسمة اقرب قيمة زوجية وهي 20 على 2 ويتبقى 1

$20 \div 2 = 10$ ويتبقى 1

$10 \div 2 = 5$ ويتبقى 0

الرقم 5 فردي لذلك سوف نقوم بقسمة اقرب قيمة زوجية وهي 4 على 2 ويتبقى 1

$4 \div 2 = 2$ ويتبقى 1

$2 \div 2 = 1$ ويتبقى 0

الرقم 1 فردي فسوف نقوم بقسمه أقرب قيمة وهي 0 على 2 ويتبقى معانا 1

$0 \div 2 = 0$ ويتبقى 1

لاحظ أنّ طريقة كتابة الرقم هي: **من أسفل لأعلى↑ ثمّ من اليسار الى اليمين→**

القيمة النهائية للعدد 87 بالنظام الثنائي هي 1010111

سؤال :حول العدد 13 من النظام العشري الى النظام الثنائي (الناتج النهائي هو(1101))

سؤال :اختر الاشكال الصحيحة بالنظام الثنائي التي تقابل الاعداد التالية بالنظام العشري:
(1,2,3,4,5,15,16,20,32,64)

(0, 1, 11, 10000, 101, 10100, 1000000, 100, 10, 1111 , 100000) $(H.W)$

سؤال: حول الاعداد التالية من النظام العشري الى النظام الثنائي:

1. $(10.6875)_{10}$
2. $(2.015)_{10}$ $(H.W)$

الحل:

1. $(10.6875)_{10}$

نتعامل مع الجزء الصحيح و الجزء العشري من العدد اعلاه بصورة منفصلة كما مبين في الخطوات ادناه:

- نحول العدد الصحيح 10 الى النظام الثنائي باستخدام طريقة القسمة التي تم شرحها سابقاً

$10\div2=5$...............المتبقي 0

$5\div2=2$...............المتبقي 1

$2\div2=1$...............المتبقي 0

$1\div2=0$.................المتبقي 1

نرتب العدد الثنائي ابتداءا من الاسفل الى الاعلى ومن اليسار الى اليمين

∴ العدد الثنائي المقابل ل 10 هو 1010

بالنسبة للجزء الكسري من العدد(10.6875) وهو 0.6875 يتم تحويله بالشكل التالي :

1- نضرب العدد 0.6875 في 2 لنحصل على $1.375=2\times0.314$ ناخذ العدد الصحيح من الناتج = 1
2- نضرب الجزء الكسري الناتج من الخطوة السابقة وهو 0.375 في 2 لنحصل على $0.75=2\times 0.375$ ناخذ الجزء الصحيح = 0
3- ثم نضرب الجزء الكسري مرة اخرى في 2 لنحصل على $1.5=2\times0.75$ ناخذ الجزء الصحيح من الناتج = 1 ونضرب الجزء الكسري وهو 0.5 في 2 لنحصل على 1.0 ناخذ العدد الصحيح وهو 1 ونتوقف هنا وذلك لاننا حصلنا على الجزء الكسري صفرا.

نستمر بهذة العملية الى ان نحصل على الجزء الكسري 0 او نتوقف الى تقريبا ستة او سبعة خطوات لعملية الضرب اعلاه.

الان نرتب الاعداد الصحيحة التي حصلنا عليها من الخطوات السابقة لتشكيل الجزء الكسري في النظام الثنائي بحيث نبدأ الترتيب من الاسفل الى الاعلى ومن ثم من اليمين الى اليسار ↑← فيصبح الجزء الكسري بالشكل 0.1011 نضيف لهذا العدد المقدار الثنائي المكافئ لل10 وهو 11101 والذي اوجدناه سابقا ليصبح الشكل النهائي 1010.1011

سؤال: اذا علمت ان $x = 1.5,\ \ y = 2.72$. جد ناتج $(?)_2 = (x+y)_{10}$

سؤال: اذا علمت ان $b=(10.1101)_2$, $a=(101.01)_2$. جد ناتج $(a-b)_2 = (?)_{10}$