مقارنة الطرق المختلفة:

تعرفنا سابقا على طرق مختلفة لايجاد جذر معادلة المتغير الواحد $f(x) = 0$ ان اختيار طريقة او اخرى لحل مسألة معينة يعتمد على فهم امكانيات ومزايا كل طريقة من الطرق التي تم شرحها سابقا. وفيما يلي ملخص لمزايا وامكانيات كل من هذه الطرق:

1- طريقة تنصيف الفترة (bisection method) : وحيث ان الفترة التي يوجد فيها الجذر يتم تقليصها بعد كل خطوة من خطوات هذه الطريقة فان الوصول الة قيمة المعادلة $f(x) = 0$ وبالدقة المطلوبة باستخدام هذه الطريقة مضمون ولكن هذه الطريقة تعتبر بطيئة اذا ماقورنت بالطرق الاخرى اي ان ايجاد الجذر يتطلب تكرار تنصيف الفترة التي يوجد فيها الجذر عدد كبير من المرات.

2- طريقة النقطة الثابتة (fixed point method) : في هذه الطريقة تتم كتابة المعادلة $f(x) = 0$ بالصيغة $g(x) = x$ وفيما اذا كان استخدام صيغة معينة من الصيغ $g(x) = x$ التي يمكن كتابة الدالة بها يؤدي الى الوصول الى قيمة الجذر اولا فان هذا يعتمد على اختيار الدالة $g(x)$ وكذلك القيمة التقريبية المبدئية للجذر. وحتى نضمن الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر باستخدام هذه الطريقة يجب التحقق من صحة $\left|g(\acute{x})\right| < 1$ لكل نقاط الفترة التي يتم البحث عن الجذر فيها.

3- طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson's method) : وهي من اكثر الطرق استخداما واسرعها في ايجاد القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x) = 0$ وهي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة والشرط الضروري للوصول الى القيمة الدقيقة للجذر باستخدام هذه الطريقة هو ان تكون القيمة التقريبية الاولية للجذر قريبة بدرجة كافية من قيمته الدقيقة.

4- طريقة القاطع (secant method) : وهذه الطريقة مشتقةاصلا من طريقة نيوتن-رافسون وذلك باستبدال المشتقة $f(\acute{x})$ بقيمتها التقريبية ويفضل استخدام هذه الطريقة اذا كانت صيغة المشتقة$f(\acute{x})$ معقدة نسبيا. وسرعة الوصول الى الجذر باستخدام طريقة نيوتن-رافسون.

مما سبق فانه وعند البحث عن القيمة الدقيقة لجذر معادلة المتغير الواحد $f(x) = 0$ يتوجب اتباع الخطوات التالية:

1- اوجد اقصر فترة يمكن ان يوجد بها جذر المعادلة (ادق قيمة تقريبية ممكنة) باستخدام احدى الطرق التي تم شرحها مسبقا.

2- اذا كانت الفترة التي يوجد فيها جذر المعادلة واسعة نسبيا استخدم طريقة تنصيف الفترة مرات عديدة وذلك للوصول الى دقة معينة تضمن الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر استخدام الطرق الاخرى.

3- استخدم بعد ذلك طريقة نيوتن-رافسون او طريقة القاطع (في حال كون صيغة المشتقة $f(x)$ معقدة نسبيا) مرات عديدة للوصول الى الدقة الطلوبة.

تمارين

1) احسب عدد الخطوات الازمة بطريقة تنصيف الفترة (bisection method) لايجاد جذر المعادلة $3x^2 - e^{-x} = 0$ والذي يقع في الفترة [4, 3.5] مقربا للمنزلة العشرية الثالثة.

2) باستخدام طريقة تنصيف الفترة (bisection method) اوجد جذر المعادلة $3x^2 - e^{-x} = 0$ والذي يقع في الفترة [4, 3.5] مقربا للمنزلة العشرية الثالثة.

3) باستخدام طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson's method) اوجد قيمة $\sqrt{10}$ وبدقة حتى المنزلة العشرية الرابعة.

4) لايجاد جذر المعادلة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ والواقع في الفترة [1 , 2] بطريقة النقطة الثابتة (fixed point method) فان بعض صيغ التكرار المقترحة هي :

1) $x_{n+1} = x_n - {x^3}_n - 4{x^2}_n + 10$

2) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n} - 4x_n}$

3) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - {x_n}^3}$

4) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n+4}}$

5) $x_{n+1} = x_n - \frac{{x^3}_n - 4{x^2}_n - 10}{3{x^2}_n + 8x_n}$

أ- بين كيف الحصول على كل من هذه الصيغ

ب- اي من هذه الصيغ يؤدي استخدامها الى الوصول الى جذر المعادلة اعلاه

ج- اوجد جذر هذه المعادلة باستخدام احدى هذه الصيغ.

5) اوجد جذر المعادلة $3xe^{x} = 1$ والواقع في الفترة [1 , 0] وبدقة حتى المنزلة العشرية الثالثة مستخدما:

1- طريقة تنصيف الفترة (bisection method)

2- طريقة النقطة الثابتة (fixed point method)

3- طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson's method)

4- طريقة القاطع (secant method)

وقارن بين هذه الطرق من حيث سرعة الوصول الى قيمة الجذر وبالدقة المطلوبة.

6) اوجد الجذر الموجب للمعادلة $\cos x = \mathrm{x}^2$ وبدقة حتى المنزلة العشرية الرابعة

7) اثبت ان صيغة التكرار التي يمكن بواسطتها ايجاد قيمة الجذر التربيعي للعدد a هي :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\, x_n + \frac{a}{x_n}$$

استخدم هذه الصيغة لايجاد $\sqrt{3}$