Chapter 6

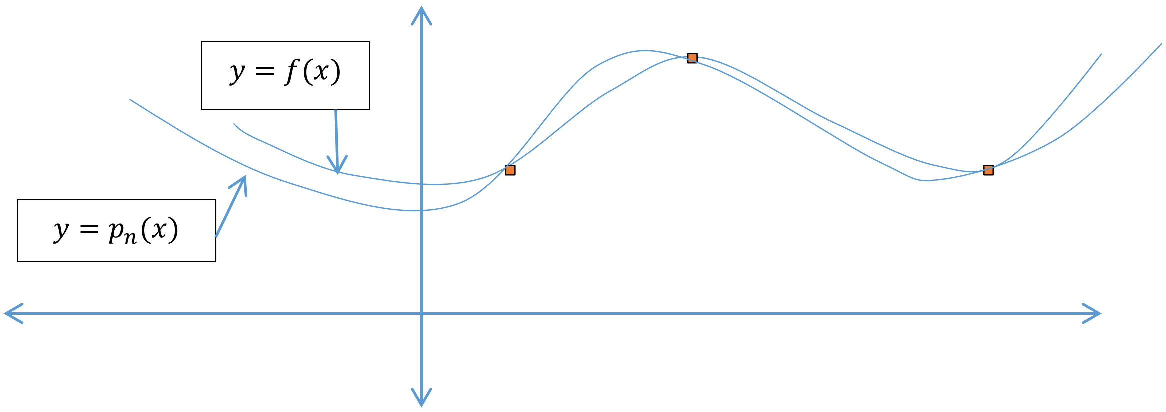
استظهار القيم وتوفيق كثيرات الحدود

يقصد باستظهار او استيفاء القيم (interpolation) هو ايجاد قيم الحدود المجهولة التي تتوسط جملة من حدود معلومة من متتالية معينة. فمثلا اذا كانت العلاقة بين المتغيرين x و y معرفة الجدول التالي

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	3	4	6	8	11	15

فيقصد باستظهار قيمة y عندما تكون $x = 4.5$ هي تقدير قيمة $f(4.5)$ لاحظ ان $x = 4.5$ تقع في الفترة $[1,6]$ التي توصف خلالها العلاقة بين هذين المتغيرين.

اما توفيق كثيرة الحدود (polynomial fitting) فيقصد به ايجاد كثيرة الحدود الجبري التي تصف العلاقة بين x و y اي ايجاد كثيرة الحدود $p_n(x)$ والتي تحقق جميع النقاط التي تحققها الدالة المستمرة $y = f(x)$.



الصيغة العامة لكثيرة الحدود هي

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

حيث ان n عددا صحيح موجب و $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ اعدادا حقيقية.

نظرية: لكل دالة $f(x)$ معرفة ومتصلة في الفترة $[a, b]$ فانه يمكن ايجاد كثيرة حدود $P_n(x)$ التي تصف هذه الدالة بالدقة المطلوبة.

الخطأ المطلق بين قيمة الدالة وقيمة كثيرة الحدود اقل من قيمة محددة ولتكن ε، ولكل نقاط الفترة $[a, b]$، ويعبر عنه بالشكل التالي

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

يمكن ايجاد كثيرة الحدود بطرق مختلفة مثلا طريقة (Taylor) وطريقة (Lagrange) وطريقة (Newton divided difference) طريقة الفروق النسبية ل نيوتن.

5-1 كثيرة الحدود ل Taylor (Taylor's polynomial)

نحصل على كثيرة الحدود $P_n(x)$ باستخدام متسلسلة تايلور حول النقطة x_0 من الصيغة التالية

$$P_n(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

حيث $f^{(n)}(x_0)$ تمثل المشتقة النونية (n-th derivative) للدالة $f(x)$ عند النقطة $x = x_0$، اي ان:

$$f^{(n)}(x_0) = \left.\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

h : بعد النقطة x عن النقطة x_0.

R_n : الحد المتبقي (reminder term) وهو يصف مقدار الخطأ الناتج عن تقدير الدالة $f(x)$ باستخدام عدد محدود من حدود متسلسلة تايلور، ويسمى الخطأ ايضا (Truncation error)، وقيمته هي:

$$R_n = f(x) - P_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

حيث ان ξ هي نقطة ما موجودة بين النقطتين x و x_0.

مثال: اوجد كثيرة حدود لتايلور (Taylor's Polynomial) من الدرجة الثالثة والذي يمكن ان يستخدم لتقدير قيم الدالة $f(x) = \sqrt{1+x}$ حول النقطة $x_0 = 0$.

الحل:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{-1}{2}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{\frac{-3}{2}}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{\frac{-5}{2}}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$h = x - x_0 = x - 0 = x$$

اذا حول النقطة $x_0 = 0$، فان:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

وباستخدام كثيرة الحدود هذه يمكن تقدير قيم الدالة $f(x) = \sqrt{1+x}$، فمثلا القيمة التقريبية ل $\sqrt{1.1}$ هي:

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1} = 1 + \frac{1}{2}(0.1) + \frac{1}{8}(0.1)^2 + \frac{1}{16}(0.1)^3 = 0.9487$$

2-5 كثيرة الحدود ل Lagrange

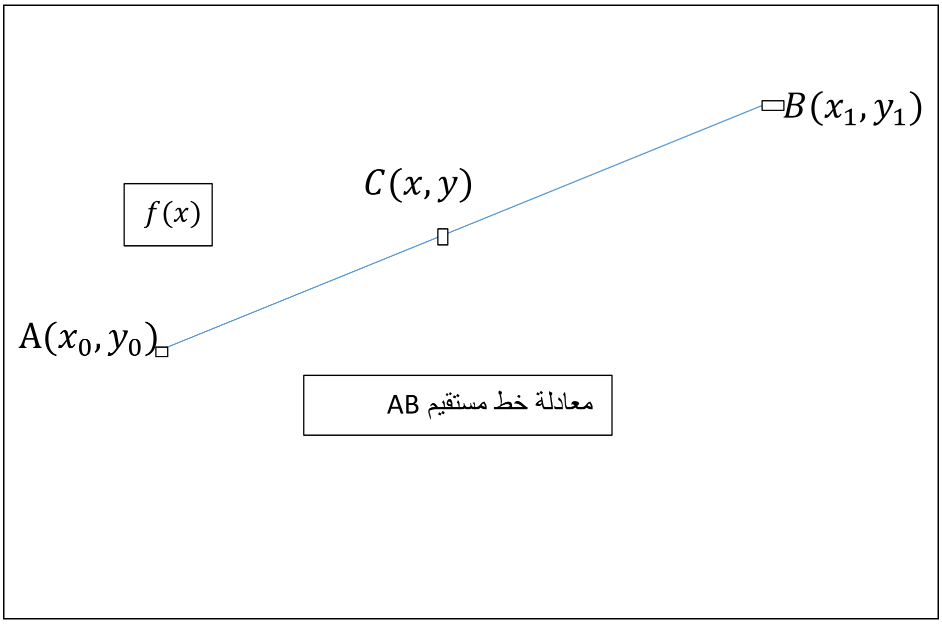
في طريقة ايجاد كثيرة حدود باستخدام Taylor حول النقطة x_0، كلما ابتعدنا عن هذه النقطة كان مقدار الخطأ في هذا التقدير كبيرا. اما كثيرة حدود (Lagrange) فيعطينا امكانية تقدير قيمة الدالة في فترة معينة في حال معرفة قيم الدالة عند بعض نقاط هذه الفترة وبمعنى اخر فان كثيرة الحدود ل (Lagrange) تصف المنحني من الدرجة الادنى والذي يمر في كل النقاط المعروفة قيمة الدالة عندها.

فمثلا لو كان لدينا الدالة $y = f(x)$ والمعروفة قيمتها عند x_0 و x_1 اي ان:

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_1 = f(x_1)$$

فان المنحني الادنى والذي يمر بالنقطتين $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ ، $\mathrm{B}(x_1, y_1)$ هو الخط المستقيم AB كما موضح بالشكل ادناه



x

ونستطيع تقدير قيمة الدالة $f(x)$ عند اي نقطة بين هاتين النقطتين (مثل نقطة C)، من معرفة معادلة الخط المستقيم AB.

بما ان النقاط الثلاث A، B، C تقع على نفس الخط المستقيم، فان ميل القطعة AC يساوي ميل القطعة AB. اي ان:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

ومنها: $y - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$

اي ان:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) + y_0$$

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 + \left(1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)y_0$$

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}y_0$$

وبالتالي فان:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$$

اي ان معادلة الخط المستقيم الذي يصف هذه الدالة هي:

$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$..............................(1)

حيث نلاحظ ان $P_0(x_0) = y_0$ ، $P_1(x_1) = y_1$

يمكن كتابة الصيغة (1) بالشكل

$$P_1(x) = L_0 y_0 + L_1 y_1$$

حيث المعاملات

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1},$$

$$L_{1=}\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

بشكل عام اذا كان لدينا النقاط $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)),$ فأن كثيرة الحدود ل (Lagrange) والتي يمر منحناها بهذه النقاط جميعها يكون:

$$P_n(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + \cdots + L_n f(x_n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} L_k f(x_k)$$

والصيغة العامة لمعامل (Lagrange) هي:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

مثال: اوجد كثيرة الحدود ل (Lagrange) والتي تمر منحناها بالنقاط التالية:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-5	-6	-1	16

الحل:

الصيغة العامة لكثيرة الحدود ل /(Lagrange)

$$P_3(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + L_2(x).f(x_2) + L_3(x).f(x_3)$$

نلاحظ انه تم اخذ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة لان عدد النقاط المعطاة هو اربع)

حيث:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$

$$= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$\therefore f(x) = P_3(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$$

$$=\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - 3x(x-2)(x-3) +$$
$$\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)) + \frac{16}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$f(x) \approx x^3 - 2x - 5$$