رتبة التقارب للمتتابعة (Rate of convergence of a sequence)

لتكن المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب الى α وليكن c, m عددين موجبين بحيث $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^m} = c$ حيث

يسمى ال c ثابت التقارب،

فنقول ان المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تقترب الى α من الرتبة m (تقارب من الرتبة m)

ملاحظة:

- عندما $m = 1$ يسمى التقارب خطيا (linear rate of convergence)
- عندما $m = 2$ يسمى التقارب تربيعيا (quadratic rate of convergence)

مثال: لتكن المتتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة من الرتبة 1 (تقارب خطي) للصفر

$\frac{|x_{n+1}-0|}{|x_n-0|} = c_1$ ، حيث ان ثابت التقارب c_1

ولتكن المتتابعة $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة تربيعيا $(m = 2)$ للصفر وان ثابت التقارب c_2

$$\frac{|y_{n+1} - \alpha|}{|y_n - \alpha|^2} = c_2$$

وحيث ان $c_1 = c_2 = 0.5.$

من علاقة التقارب للمتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ للصفر نحصل على

$|x_n| = c_1|x_{n-1}|$

at $n = 1$, $|x_1| = 0.5|x_0|$,

at $n = 2$, $|x_2| = 0.5|x_1| = 0.5 * 0.5|x_0|$,

$\Rightarrow$ $|x_2| = (0.5)^2|x_0|$

at $n = 3$, $|x_3| = 0.5|x_2| = 0.5 * (0.5)^2|x_0|$,

$\Rightarrow$ $|x_3| = (0.5)^3|x_0|$

.

.

.

$$|x_n| = (0.5)^n |x_0|$$

من علاقة التقارب للمتابعة $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ للصفر نحصل على

$$|y_n| = c_2 |y_{n-1}|^2$$

at $n = 1,\ \ |y_1| = 0.5|y_0|^2$

at $n = 2,\ \ |y_2| = 0.5|y_1|^2$

$$= 0.5\,(0.5|y_0|^2)^2$$

$$= (0.5)^3 |y_0|^{2^2} = (0.5)^{2^2-1} |y_0|^{2^2}$$

at $n = 3,\quad |y_3| = 0.5|y_2|^2$

$$= 0.5((0.5)^3 |y_0|^4)^2$$

$$= (0.5)^7 |y_0|^8 = (0.5)^{2^3-1} |y_0|^{2^3}$$

.

.

.

$$|y_n| = (0.5)^{2^n-1} |y_0|^{2^n}$$

نفرض ان $x_0 = y_0 = 1$، نحصل على:

n	$\|x_n\| = (0.5)^n \|x_0\|$	$\|y_n\| = (0.5)^{2^n-1} \|y_0\|^{2^n}$
1	$x_1 = 0.5$	$x_1 = 0.5$
2	$x_2 = (0.5)^2 = 0.25$	$x_2 = (0.5)^3 = 0.125$
3	$x_3 = (0.5)^3 = 0.125$	$x_3 = (0.5)^7 = 0.0078125$
	.	.
	.	.
	.	.
	↓ ↓	↓ ↓
	0 تقارب ابطأ الى الصفر	0 تقارب اسرع الى الصفر

ملاحظة: كلما زادت رتبة التقارب لمتتابعة زادت سرعة التقارب بالتالي يؤدي الى تقليل عدد التكرارات المطلوبة للوصول الى القيمة التقريبية لجذر المعادلة.

مثال: اذا كانت الدالة f تمتلك صفرا وليكن α (جذر المعادلة) $f(x) = 0$ فاثبت ان طريقة نيوتن- رافسون تتقارب ال α تقاربا تربيعيا $(m = 2)$ بشرط ان تكون نقطة البداية قريبة قربا كافيا من α (α جذرا بسيطا)

الحل: $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\} \to \alpha$

بما ان صيغة التكرارات لطريقة نيوتن- رافسون هي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

المطلوب اثبات ان طريقة نيوتن-رافسون تقترب ال α تقاربا تربيعيا اي ان:

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = c$$

باستخدام متسلسلة تايلور للدالة f حول النقطة x_n، نحصل على:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + R_1,$$

حيث ان $R_1 = \frac{(x-x_n)^2}{2!} f''(\xi_n),$ ξ_n بين x_n و x

نعوض $x = \alpha$

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + R_1, \quad R_1 = \frac{(\alpha-x_n)^2}{2!} f''(\xi_n)$$

حيث ان ξ_n بين x_n و α

بما ان α تمثل جذر للمعادلة $f(x) = 0$، اذا $f(\alpha) = 0$ من هنا والمعادلة في الاعلى، نحصل على:

$$0 = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + R_1$$

$$\to \ -(\alpha - x_n)f'(x_n) - f(x_n) = R_1 = \frac{(\alpha - x_n)^2}{2!} f''(\xi_n)$$

نقسم طرفي المعادلة اعلاه على $f'(x_n)$، نحصل على

$$-(\alpha - x_n) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(\alpha-x_n)^2}{2!} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)},$$ حيث ξ_n بين x_n و α

$$-\alpha + x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(\alpha - x_n)^2}{2!} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

من صيغة التكرارات لطريقة نيوتن- رافسون $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ والمعادلة اعلاه، نحصل على :

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(\alpha - x_n)^2}{2!} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

نضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{(\alpha - x_n)^2}$، نحصل على

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{f''(\xi_n)}{2\, f'(x_n)}$$

عندما $n \to \infty$, $\alpha < \xi_n < x_n$، نحصل على

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \approx \frac{f''(x_n)}{2\, f'(x_n)} = c \quad \leftarrow \quad (\text{ثابت خطأ التقارب } c)$$

$$\therefore \ \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = c\ , \quad n \to \infty$$

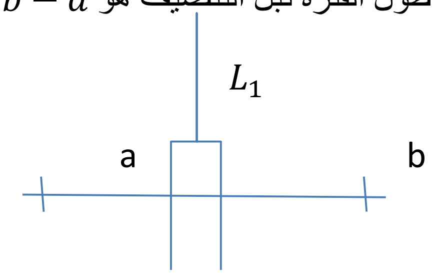
∴ حسب تعريف رتبة التقارب نستنتج ان طريقة نيوتن – رافسون تقاربها تربيعيا، حيث $m = 2$

واجب: رتبة تقارب طريقة النقطة الثابتة **(H.W)**

Rate of convergence of fixed-point iteration

مثال: اذا كانت الدالة f مستمرة ، $f \in [a,b]$ ، بحيث $f(a).f(b) < 0$. وباستخدام طريقة التنصيف، نولد متتابعة من الحلول العددية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تقترب الى الحل الدقيق p للمعادلة $f(x) = 0$ بحيث $f(p) = 0$. فأن طريقة التنصيف تمتلك تقاربا خطيا (تقارب من الرتبة الاولى).

الحل: طول الفترة قبل التنصيف هو $b - a$ ولنفرض ان طول الفترة هو L_1، لذا $L_1 = b - a$



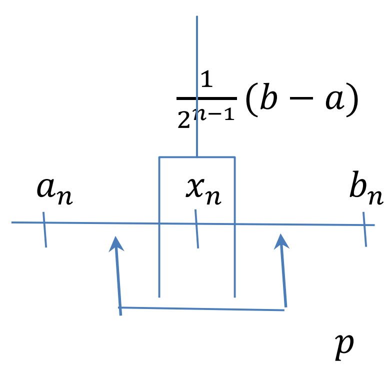
بما ان طريقة التنصيف تستند على تنصيف الفترة، لذا فأن طول الفترة الثانية هو

$$L_2 = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}(b-a)$$

كذلك $L_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{1}{2^2}(b-a)$. لذلك فأن طول الفترة عند التكرار النوني سوف يكون

$$L_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$$

ايضا عند التكرار النوني لدينا الحل التقريبي في منتصف الفترة $[a_n, b_n]$ وكما موضح في الشكل ادناه



بما ان الحل الدقيق p ايضا موجود داخل الفترة $[a_n, b_n]$، اي قد يكون اما موجود على يمين او يسار x_n، لذا فأن اعلى قيمة للمسافة بين x_n و p هو نصف طول الفترة $\frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$ ، اي ان

$$|x_n - p| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}(b-a)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-2}}(b-a)\right)\right] = \frac{1}{2}|x_{n-1} - p|$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{|x_n - p|}{|x_{n-1} - p|} \leq \frac{1}{2}$$

اذا حسب نظرية رتبة المتتابعة، نستنتج ان رتبة التقارب لطريقة التنصيف هي 1 $(m = 1)$، اي ان الطريقة تتقارب تقاربا خطيا وثابت التقارب هو $\frac{1}{2}$