3- طريقة نيوتن- رافسون (**Newton-Raphson's Method**)

هذه الطريقة تعبر من اشهر الطرق العددية المستخدمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ والقريب من قيمة معينة. هذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة (fixed-point method). صيغة التكرارات (iterative method) المستخدمة في هذه الطريقة هي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

يمكن اشتقاق صيغة التكرارات اعلاه باستخدام متسلسلة تايلور كالاتي:

باستخدام متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة x_0، نحصل على

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi)$$

بحيث ξ بين x_0 و x بما ان الحل الدقيق يحقق المعادلة $f(x) = 0$ ، فان المعادلة اعلاه تصبح:

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi) = 0$$

بإهمال الحد المتبقي $\frac{h^2}{2!}f''(\xi)$ كون المقدار h^2 قليل جداً (لان القيمتين $x, \propto$ قريبتين من بعضهما)، نستنتج ان:

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

وبتبسيط هذه المعادلة نحصل على

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بما ان قيمة $h = x - x_0$، من هنا ومن المعادلة اعلاه نحصل على

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

اي ان :

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

من هذه المعادلة نستطيع ايجاد القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x) = 0$ من معرفة قيمته التقريبية وبالتالي فان صيغة التكرار (iterative method) لهذه الطريقة هي :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

مثال: باستخدام طريقة نيوتن- رافسون (Newton-Raphson method) ، اوجد جذر المعادلة $\boldsymbol{cos\ (2x) - x = 0}$، اذا علمت ان القيمة التقريبية لهذا الجذر هي: $\boldsymbol{x_0 = 0.6}$.

$$f(x) = \cos(2x) - x$$

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 1$$

اي ان الصيغة التكرارية هي:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos(2x_n) - x_n}{2\sin(2x_n) + 1}$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos(2x_0) - x_0}{2\sin(2x_0) + 1} = 0.6 + \frac{\cos(2 * 0.6) - 0.6}{2\sin(2 * 0.6) + 1} = 0.51703$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos(2x_1) - x_1}{2\sin(2x_1) + 1} = 0.51703 + \frac{\cos(2 * 0.51703) - 0.51703}{2\sin(2 * 0.51703) + 1} = 0.51493$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(2x_2) - x_2}{2\sin(2x_2) + 1} = 0.51493 + \frac{\cos(2 * 0.51493) - 0.51493}{2\sin(2 * 0.51493) + 1} = 0.51493$$

نلاحظ بان تم الحصول على القيمة الدقيقة للجذر بتكرار الصيغة اعلاه ثلاث مرات فقط.

مثال: اعد حل المثال السابق باستخدام القيمة التقريبية للجذر $x_0 = 0.75$

الحل:

$$x_0 = 0.75$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos\ (2x_0) - x_0}{2\sin\ (2x_0) + 1} = 0.75 + \frac{\cos\ (2 * 0.75) - 0.75}{2\sin\ (2 * 0.75) + 1} = 0.5232$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos\ (2x_1) - x_1}{2\sin (2x_1) + 1} = 0.5232 + \frac{\cos (2 * 0.5232) - 0.5232}{2\sin (2 * 0.5232) + 1} = 0.51496$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos (2x_2) - x_2}{2\sin (2x_2) + 1} = 0.51496 + \frac{\cos (2 * 0.51496) - 0.51496}{2\sin (2 * 0.51496) + 1} = 0.51493$$

$$x_4 = x_3 + \frac{\cos (2x_3) - x_3}{2\sin (2x_3) + 1} = 0.51493 + \frac{\cos (2 * 0.51493) - 0.51493}{2\sin (2 * 0.51493) + 1} = 0.51493$$

نلاحظ ان عدد مرات التكرارات الازمة للحصول على القيمة الدقيقة للجذر قد زاد عن عدد مرات التكرارات في المثال السابق وذلك لان الفرق بين القيمتين التقريبية والدقيقة قد زاد عن ذلك في المثال السابق.

مثال: اعد حل المثال السابق باستخدام القيمة التقريبية للجذر $\boldsymbol{x_o = 2}$

الحل:

$$x_o = 2$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos\ (2x_0) - x_0}{2\sin\ (2x_0) + 1} = 2 + \frac{\cos\ (2 * 2) - 2}{2\sin\ (2 * 2) + 1} = 7.1667$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos\ (2x_1) - x_1}{2\sin (2x_1) + 1} = 7.1667 + \frac{\cos (2 * 7.1667) - 7.1667}{2\sin (2 * 7.1667) + 1} = 4.681$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(2x_2) - x_2}{2\sin(2x_2) + 1} = 4.681 + \frac{\cos(2 * 4.681) - 4.681}{2\sin(2 * 4.681) + 1} = -0.3649$$

من الواضح انه حتى لو استمريت باستخدام الصيغه اعلاه فاننا لن نستطيع الوصول الى القيمة الدقيقية لجذر المعادلة وذلك لان الفرق بين القيمة التقريبية التي افترضناها والقيمة الدقيقة للجذر كبير نسبياً.

من الامثلة السابقة نستنتج ان:

1- باستخدام طريقة نيوتن رافسون يمكن الوصول الى القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x) = 0$ بعدد قليل من مرات تكرار صيغة هذه الطريقة.

2- سرعة الحصول على القيمة الدقيقة للجذر تعتمد على الفرق بين بين القيمة التقريبية للجذر التي انفترضها والقيمة الدقيقة له. وكلما كان الفرق قليلا كلما كان الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر اسرع.

3- اذا كان الفرق بين القيمة التقريبية للجذر والقيمة الدقيقة له كبيراً ، فاننا قد لا نستطيع الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر.

مثال: باستخدام طريقة طريقة نيوتن رافسون اوجد قيمة الجذر للمعادلة $x^2 e^x cos\, 2x = 0$ في الفترة $[0.7,\ 0.8]$

مثال: باستخدام طريقة طريقة نيوتن رافسون اوجد قيمة الجذر للمعادلة $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ في الفترة $[0,\ 1]$ **H.W**

مثال: باستخدام طريقة طريقة نيوتن رافسون اوجد قيمة الجذر للمعادلة $x^2 + 4sinx = 0$ وبخطأ $\mathcal{E} = 0.0005$ حيث ان $x_0 = 3$

4- طريقة القاطع (The Secant Method)

في هذه الطريقة نتخلص من المشتقة $(f'(x))$ في طريقة نيوتن رافسون وذلك لان في بعض الحالات تتكون المشتقة من عدد كبير من الحدود لذلك فان حساب قيمة المشتقة عند كل خطوة من خطوات طريقة نيوتن- رافسون يتطلب اجراء عدد من العمليات الحسابية الاضافية.

مثلاً الدالة $f(x) = x^2 e^x cos\ 2x$، فأن:

$$f'(x) = 2xe^x cos\ 2x + x^2 e^x cos\ (2x\ ) - 2x^2 e^x sin\ (2x)$$

لاحظ العدد الكبير من العمليات الحسابية اللازمة لحساب قيمة هذه المشتقة عند كل خطوة من خطوات طريقة نيوتن- رافسون.

في صيغة التكرار في طريقة نيوتن- رافسون والتي هي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

نستبدل المشتقة $f'(x_n)$ بقيمتها التقريبية

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

ومن ثم نحصل على صيغة التكرار لطريقة القاطع، وهي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

نلاحظ ان في هذه الصيغة، حساب قيمة x_{n+1} يتطلب معرفة قيمتين x_n و x_{n-1}

مثال: باستخدام طريقة القاطع (secant method) **، اوجد قيمة جذر المعادلة**
$x^2 e^x cos\,(2x) = 0$ **الموجود في الفترة** [0.7,0.8].

الحل: صيغة التكرار لطريقة القاطع هي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

باستخدام طرفي الفترة التي يوجد فيها الجذر 0.7, 0.8 كقيمتين تقريبيتين لجذر المعادلة ، سنحصل على الجدول التالي:

n	x_n	x_{n-1}	$f(x_n)$	$f(x_{n-1})$	x_{n+1}
1	0.8	0.7	-0.0416	0.1677	0.7801
2	0.7801	0.8	0.0141	-0.0416	0.7851
3	0.7851	0.7801	0.0008	0.0141	0.7854
4	0.7854	0.7851	$-5x10^{-6}$	0.0008	0.7854