ب) طريقة سمبسون Simpson's Method

نســتعمل هنا صــيغة نيوتن التقدمية وتكاملها على الفترة $[x_0, x_2]$ بالنســبة إلى (الفترة $[0,2]$ t)فنحصل على:–

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx =$$

$$h[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2\right)\Delta^3 f_0 + \cdots {}^2_0]$$

$$= h[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 + 0.\Delta^3 f_0 - \frac{1}{90}\Delta^4 + \cdots]$$

وعند بتر هذه المتسلسلة بعد الحد في الفروقات الثالثة تنتج العلاقة:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} + (f_0 + 4f_1 + f_2) \ldots\ldots\ldots.(4)$$

وهذه صيغة سمبسون للتكامل العددي وخطا البتر فيها يساوي:

$$T = \frac{1}{90}h\Delta^4 f_0 + \ldots\ldots\ldots.$$

$$= \frac{-h^5}{90}f^4(\theta).\theta_\varepsilon(x_0, x_2)$$

أي أن خطا البتر المحلي من الرتبة $\theta(h^5)$ وان الصيغة (4) تعطي قيمة مضبوطة للتكامل عندما تكون الدالة f متعددة حدود من الدرجة الثالثة فما دون.يمكن كتابة صيغة سمبسون المركبة وذلك بتطبيق الصيغة (4)على كل جزء من المدى متكون من فترتين جزئيتين $[x_i, x_{i+2}]$ فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \ldots \ldots \ldots (5)$$

من الواضح أن n يجب أن يكون عددا زوجيا لأجل تطبيق طريقة سمبسون.في الحالات التي يكون فيها n فرديا يمكن استخدام طريقة شبه المنحرف على الفترة $[x_0, x_1]$ ثم طريقة سمبسون على الفترات الباقية من المدى.

امثلة:

1- حل التكامل العددي التالي $\int_0^4 e^x dx$ بطريقة سمبسون اذا علمت ان $h = (4-0)/8$

الحل :

$$h = \frac{1}{2} \quad , n = 8, \quad a = 0, \quad b = 4$$

$$f(a) = f(0) = e^0 = 1, f(b) = f(4) = e^4 = 54.598$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5 \Rightarrow f(x_1) = f(0.5) = e^{0.5} = 1.64872$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1 \Rightarrow f(x_2) = f(1) = e^1 = 2.71828$$

$$x_3 = x_2 + h = 1 + 0.5 = 1.5 \Rightarrow f(x_3) = f(1.5) = e^{1.5} = 4.48168$$

$$x_4 = x_3 + h = 1.5 + 0.5 = 2 \Rightarrow f(x_4) = f(2) = e^2 = 7.38905$$

$x_5 = x_4 + h = 2 + 0.5 = 2.5 \Rightarrow f(x_5) = f(2.5) = e^{2.5} = 12.18249$

$x_6 = x_5 + h = 2.5 + 0.5 = 3 \Rightarrow f(x_6) = f(3) = e^{3} = 20.08553$

$x_7 = x_6 + h = 3 + 0.5 = 3.5 \Rightarrow f(x_7) = f(3.5) = e^{3.5} = 33.11545$

$$\int_0^4 e^x dx = \frac{h}{3}(f_0 + f_n + 4(f_1 + f_3 + f_5 + f_7) + 2(f_2 + f_4 + f_6)$$

نحسب المجاميع :

مجموع الفردية: $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = 51.42834$

مجموع الزوجية : $f_2 + f_4 + f_6 = 30.19286$

نعوض :

$$\int_0^4 e^x dx = \frac{0.5}{3}[1 + 54.59815 + 4(51.42834) + 2(30.19286)]$$

$$= \frac{160.848615}{3}$$

$$=53.616205$$

2. حـل التكـامـل العـددي التـالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ بطريقـة ســـمبســـون إذا علمـت أن:

$$\boldsymbol{n = 6, a = 0, b = 1, h = (b - a)/n = (1 - 0)/6 = 1/6}$$

الحل:

$x_i = a + ih$

$x_0 = a + 0h = a + 0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 1$

$$x_1 = a + h = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{6})^2} = 0.97302$$

$$x_2 = a + 2h = 0 + \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_2) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{3})^2} = 0.9$$

$$x_3 = a + 3h = 0 + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_3) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} = 0.8$$

$$x_4 = a + h = 0 + \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x_4) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{1 + (\frac{2}{3})^2} = 0.69230$$

$$x_5 = a + h = 0 + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{1 + (\frac{5}{6})^2} = 0.5901639$$

$$x_6 = a + 6h = 0 + \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow f(x_6) = f(1) = \frac{1}{1 + (1)^2} = 0.5$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{h}{3}(f_0 + f_n + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4)$$

نحسب المجاميع :

مجموع الفردية: $f_1 + f_3 + f_5 = 0.97302 + 0.8 + 0.5901639 = 2.3631839$

مجموع الزوجية : $f_2 + f_4 = 0.9 + 0.69230 = 1.5923$

نعوض :

$$\int_0^4 e^x dx = \frac{0.5}{3}[1 + 0.5 + 4(2.3631839) + 2(1.5923)]$$

$$= \frac{14.131956}{18}$$

$$=0.7851086667$$

ملاحظة
نلاحظ الدقة العالية لقاعدة سمبسون مقارنة مع قاعدة شبه المنحرف.

قواعد أخرى
قاعدة سمبسون باستخدام أربع نقاط:(Simpson’s three-eighths rule)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\} - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

قاعدة سمبسون باستخدام خمس نقاط:(five-points rule)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\} - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$$

ج) طريقة سمبسون3/8

بنفس الأسلوب يمكن الحصول على صيغ رياضية أخرى للتكامل .فمثلا نكامل صيغة نيوتن على الفترة $[x_0, x_3]$ فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] \ldots\ldots(6)$$

والتي تسمى صيغة الثلاث أثمان للتكامل والتي تتضمن أربع نقاط أي أربع قيم للدالة وخطا البتر فيها من الرتبة $\theta(\hbar^5)$ كما يمطن تطبيقها عندما يكون عدد الفترات الجزئية n قابلا للقسمة على 3.

مثال:-

حل التكامل العددي التالي $\int_0^1 x^4 dx$ بطريقة سمبسون اذا علمت ان $n = 6$

الحل:

$$h = \frac{a-b}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$x_i = a + ih$$

$$x_0 = a + 0h = a + 0 = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^4 = 0$$

$$x_1 = a + 1h = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x_1) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0.00077$$

$$x_2 = a + 2h = 0 + \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_2) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0.01234$$

$$x_3 = a + 3h = 0 + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_3) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.06251$$

$$x_4 = a + h = 0 + \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x_4) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.1975$$

$$x_5 = a + h = 0 + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow f(x_5) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.482253$$

$$x_6 = a + 6h = 0 + \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow f(x_6) = f(1) = (1)^4 = 1$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{8} h(f_0 + f_6 + 3(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5)$$

نحسب المجاميع الوسطية :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 0.00077 + 0.01234 + 0.06251 + 0.1975 + 0.482253$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{8} \times \frac{1}{6}(0 + 1 + 3(0.755373)) = \frac{1}{16}(3.266119)$$

$$= \frac{3.266119}{16} = 0.2041324375$$

والقيمة الدقيقة هي0.2 ، إذن طريقة سمبسون أعطت تقريب دقيق جدا