طريقة نيوتن (Divided Difference Method)

تسمى هذه الطريقة أيضاً بطريقة الفروق النسبية إذا كانت العلاقة بين قيم المتغير x وقيم الدالة $f(x)$ في الفترة [a, b] معطاة بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	………	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	………	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

فيمكن وصف هذه الدالة باستخدام كثير الحدود التالي:

$$\begin{aligned}P(x) = a_0 &+ a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &+ a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

وذلك عند اختيار القيم المناسبة للمعاملات $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

من الواضح أنه عند تعويض القيمة x_0 للمتغير x في صيغة كثير الحدود أعلاه، نحصل على:

$$P(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

وعند تعويض القيمة x_1 للمتغير x في صيغة كثير الحدود أعلاه، نحصل على:

$$P(x_1) = f(x_1) = P(x_0) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

ومنها:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

ويرمز عادة للمقدار $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$ بالرمز $f[x_0, x_1]$ اي ان :

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

وبنفس الطريقة وللقيمتين x_1 و x_2 فان: $f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}$

وبشكل عام فان: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$

ويسمى هذا المقدار (first-order divided difference) للدالة $f(x)$ بالنسبة للمقيمتين x_i و x_{i+1}

وعند تعويض القيمة x_2 للمتغير x في صيغة كثير الحدود اعلاه فان:

$$P(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

ومنها نجد: $a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

وبتعويض قيمة كل من a_0 و a_1 التي حصلنا عليها سابقاً نجد ان:

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)}$$

ويرمز عادة للمقدار $\frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{(x_2 - x_0)}$ وبالرمز $f[x_0, x_1, x_2]$ اي ان:

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)}$$

وبنفس الطريقة وللقيم x_1 و x_2 و x_3 فان: $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{(x_3 - x_1)}$

وبشكل عام فان:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{(x_{i+2} - x_i)}$$

ويسمى هذا المقدار (second-order divided difference) للدالة $f(x)$ بالنسبة للمقيم x_i و x_{i+1} و x_{i+2}

وبنفس الطريقة نجد ان:

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{(x_3 - x_0)}$$

حيث المقدار

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{(x_{i+3} - x_i)}$$

ويسمى هذا المقدار (Third-order divided difference) بالنسبة للنقاط x_i و x_{i+1} و x_{i+2} و x_{i+3}

وبشكل عام فان:

$$a_n = f[x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}$$

حيث المقدار

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}$$

يسمى ال (n-th order divided difference) بالنسبة للنقاط $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

ولتسهيل اجراء العمليات الحسابية اللازمة للحصول على كثير حدود معين فانه يمكن استخدام الجدول التالي لترتيب نتائج هذه العمليات:

x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

مثال: باستخدام طريقة نيوتن قدر قيمة $f(2.3)$ اذا علمت ان العلاقة بين المتغير x والدالة $f(x)$ مبينه بالجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	7	9

الحل: نتائج حساب القيمة التقريبية $f(2.3)$ مبينة في الجدول التالي:

$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$			
		$f[x_0, x_1] = 4$		
$x_1 = 1$	$f[\ x_1] = 5$		$f[x_0, x_1, x_2] = -1$	
		$f[\ x_1, x_2]\ = 2$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]\ = \frac{1}{3}$
$x_2 = 2$	$f[x_2] = 7$		$f[\ x_1, x_2, x_3] = 0$	
		$f[x_2, x_3 = 2$		
$x_3 = 3$	$f[x_3] = 9$			

$$f[x_0, x_1] = \frac{5-1}{1-0} = 4$$

$$f[\ x_1, x_2] = \frac{7-5}{2-1} = 2$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{9-7}{3-2} = 2$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-4}{2-0} = -1$$

$$f[\ x_1, x_2, x_3] = \frac{2-2}{3-1} = 4$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{0-(-1)}{3-0} = \frac{1}{3}$$

وبالتالي فان :

$$P_3(x) = \ 1 + \ 4(x\ - x_0\ ) - \ (x\ -\ x_0)(x\ -\ x_1) + \frac{1}{3}(x\ - x_0\ )(x\ -\ x_1)(x\ -\ x_2)$$

$$P_3(x) = \ 1 + \ 4x - \ x(x\ -\ 1) + \frac{1}{3}x(x\ -\ 1)(x\ -\ 2)$$

$P_3(x)$ =7.509

طريقة ادنى المربعات (The Least Squares Method)

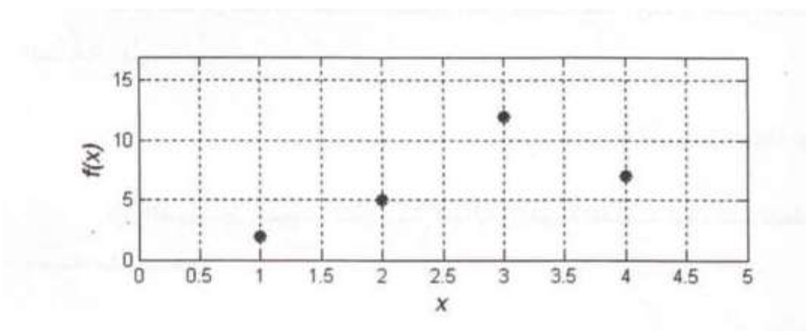
الطرق التي شرحت سابقا تعطينا امكانية الحصول على كثير الحدود الذي يمر منحناه بنقاط تعريف الدالة. حيث عرفت انه وعند تعريف الدالة عند عدد من النقاط يساوي n+1 فانه يمكننا الحصول على كثير الحدود من الدرجة n والذي يمر منحناه في جميع تلك النقاط

ولكن عندما يكون عدد النقاط المُعَرَّفَة عندها الدالة كبيرًا، فإن درجة كثير الحدود ستكون مرتفعة. وقد يكون من الأفضل في هذه الحالة تقدير تلك الدالة بكثير حدود من درجة أدنى (مثل الدرجة الأولى أو الثانية)، بحيث يكون مقدار الخطأ بين قيمة الدالة الحقيقية والقيمة التقديرية الناتجة عن كثير الحدود أقل ما يمكن.

فعلى سبيل المثال، لو كانت الدالة $f(x)$ مُعطاة في الجدول التالي:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	12	7

ونقاط تعريفها موضَّحة في الشكل أدناه، فإننا سنقوم بإيجاد كثير الحدود الذي يقدِّر هذه الدالة تقديرًا بحيث يكون الخطأ في هذا التقدير أقل ما يمكن.



وهناك معايير مختلفة يمكن استخدامها لتحديد معادلة كثير الحدود المطلوب وهي:

١- أن تكون القيمة العظمى للفرق بين القيم التقديرية للدالة (والتي نحصل عليها من كثير الحدود) والقيم الفعلية لها أقل ما يمكن.

٢- أن يكون مجموع القيم المطلقة للفرق بين القيم التقديرية للدالة والقيم الفعلية لها أقل ما يمكن.

٣- أن يكون مجموع مربعات الفرق بين القيم التقديرية للدالة والقيم الفعلية لها أقل ما يمكن.

والمعيار الثالث، من بين المعايير المذكورة أعلاه، هو الذي يقوم عليه معيار أدنى المربعات، وهو الأكثر استخدامًا.

إيجاد كثير الحدود من الدرجة الأولى (الخط المستقيم) الذي يُقدِّر الدالة بطريقة أدنى المربعات

إذا افترضنا أن معادلة الخط المستقيم المطلوب، والذي يُقدِّر الدالة المعطاة، هي:

$$y = ax + b$$

فإن الفرق بين القيمة التقديرية للدالة والقيمة الفعلية لها، عند نقطة معينة مثل x_i هو:

$$\varepsilon_i = y_i - f(x_i) = ax_i + b - f(x_i)$$

وبالتالي، فإن مجموع مربعات الفروق بين القيم الفعلية للدالة والقيم التقديرية لها يُعطى بالعلاقة:

$$S = \sum_{i=1}^{4} (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{4} (ax_i + b - f(x_i))^2$$

وحتى يكون هذا المقدار اقل ما يمكن فان قيمة كل من $\frac{\partial S}{\partial a}$ و$\frac{\partial S}{\partial b}$ يجب ان تساوي صفرا اي ان:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{4} x_i\big(ax_i + b - f(x_i)\big) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{4} \big(ax_i + b - f(x_i)\big) = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة رقم (1) نجد:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i\big(ax_i + b - f(x_i)\big) = a\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 0$$

اي ان :

$$a\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) \qquad (3)$$

من المعادلة رقم (2) نجد :

$$\sum_{i=1}^{4} \big(ax_i + b - f(x_i)\big) = a\sum_{i=1}^{4} x_i + 4b - \sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 0$$

اي ان:

$$a\sum_{i=1}^{4} x_i + 4b = \sum_{i=1}^{4} f(x_i) \qquad (4)$$

ومن حل المعادلتين (3) و (4) نجد قيمة كل من a, b

فمن الجدول المعرفة به الدالة نجد ان :

x_i	$f(x_i)$	$x.f(x_i)$	$(x_i)^2$
1	2	2	1
2	5	10	4
3	12	36	9
4	7	28	16
$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$	$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 26$	$\sum_{i=1}^{4} x.f(x_i) = 76$	$\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 = 30$

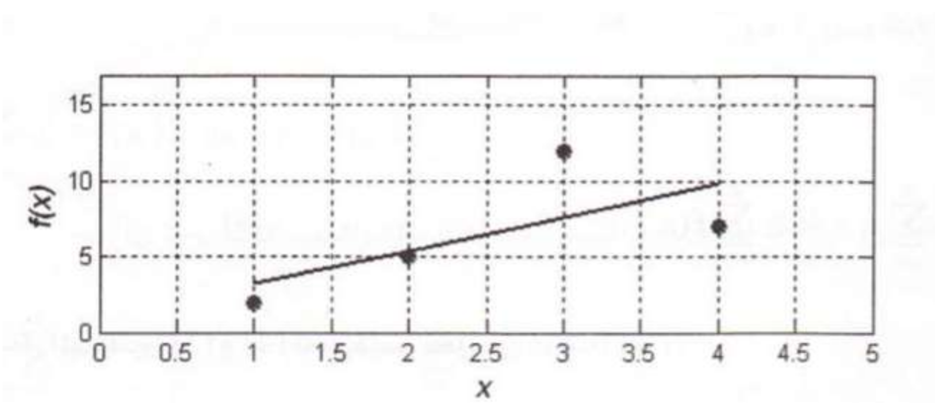
وبتعويض هذه القيم في المعادلتين (3) و (4) نجد ان: $30a + 10b = 76$

$$10a + 4b = 26$$

ومن حل هذا النظام نجد ان: $a = 2.2, b = 1$

اي ان معادلة الخط المستقيم الذي يكون عنده مجموع مربعات الفرق بين القيم التقديرية للدالة والقيم الفعلية لها اقل ما يمكن هي :

$$y = 2.2x + 1$$



ومجموع مربعات الفروق بين القيم الفعلية للدالة والقيم التقديرية لها هو:

$$S = \sum_{i=1}^{4} (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (y_i - f(x_i))^2 = 28.8$$

إيجاد كثير الحدود من الدرجة الثانية (القطع المكافئ) الذي يُقدِّر الدالة بطريقة أدنى المربعات

إذا افترضنا أن معادلة القطع المكافئ (Parabola) الذي يُقدِّر الدالة المعطاة هي:

$$y = ax^2 + bx + c$$

فإن الفرق بين القيمة التقديرية للدالة والقيمة الفعلية لها، عند نقطة معينة مثل x_i ، هو:

$$\varepsilon_i = y_i - f(x_i) = a(x_i)^2 + bx_i + c - f(x_i)$$

وعليه، فإن مجموع مربعات الفروق بين القيم الفعلية للدالة والقيم التقديرية لها يُعطى بالعلاقة:

$$S = \sum_{i=1}^{4} (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{4} (a(x_i)^2 + bx_i + c - f(x_i))^2$$

وحتى تكون هذه الكمية أقل ما يمكن، فإنه يجب أن تكون قيمة كل من المشتقات الجزئية $\frac{\partial S}{\partial a}$ و$\frac{\partial S}{\partial b}$ و$\frac{\partial S}{\partial c}$ مساوية للصفر، أي أن:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 \big(a(x_i)^2 + bx_i + c - f(x_i)\big) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{4} x_i \big(a(x_i)^2 + bx_i + c - f(x_i)\big) = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{4} \big(a(x_i)^2 + bx_i + c - f(x_i)\big) = 0 \qquad (7)$$

من المعادلة رقم (5) نجد:

$$a\sum_{i=1}^{4} (x_i)^4 + b\sum_{i=1}^{4} (x_i)^3 + c\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 f(x_i) \qquad (8)$$

من المعادلة رقم (6) نجد :

$$a\sum_{i=1}^{4} (x_i)^3 + b\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2 + c\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) \qquad (9)$$

من المعادلة رقم (7) نجد :

$$a\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{4} x_i + 4c = f(x_i) \qquad (10)$$

ومن حل المعادلتين (8) و (9) و(10) نجد قيمة كل من a, b, c

فمن المثال السابق ومن الجدول المعرفة به الدالة نجد ان :

x_i	$(x_i)^2$	$(x_i)^3$	$(x_i)^4$	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$(x_i)^2 f(x_i)$
1	1	1	1	2	2	2
2	4	8	16	5	10	20
3	9	27	81	12	36	108
4	16	64	256	7	28	112
$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$	$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2 = 30$	$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^3 = 100$	$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^4 = 354$	$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 26$	$\sum_{i=1}^{4} x_i.f(x_i) = 76$	$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2 f(x_i) = 242$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^4 = 354$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^3 = 100$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2 = 30$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2 f(x_i) = 242$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 76$$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 26$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلتين (8) و (9) و(10) نجد ان:

$$354a + 100b + 30c = 242 \qquad (11)$$

$$100a + 30b + 10c = 76 \qquad (12)$$

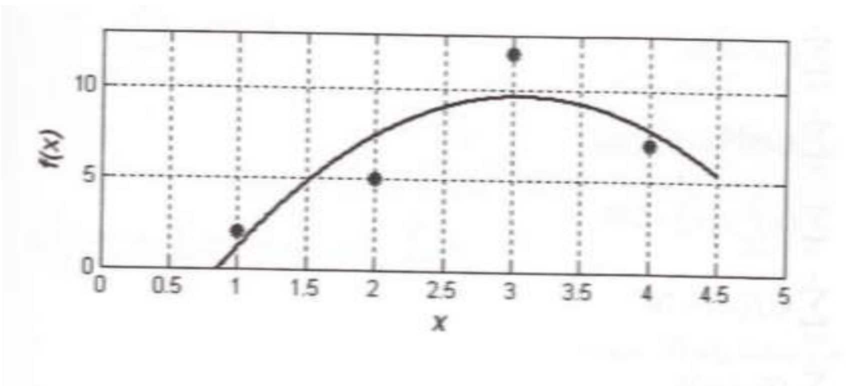
$$30a + 10b + 4c = 26 \qquad (13)$$

ومن حل هذا النظام نجد ان: $a = -2.0, \qquad b = 12.2, \qquad c = -9$

اي ان معادلة القطع المكافئ(Parabola) الذي يكون عنده مجموع مربعات الفرق بين القيم التقديرية للدالة والقيم الفعلية لها اقل ما يمكن هي :

$$y = -2x^2 + 12.2x - 9$$

ومنحني هذا القطع المكافئ مبين في الشكل ادناه:



ومجموع مربعات الفرق بين القيم الفعلية للدالة والقيم التقديرية لها هو:

$$S = \sum_{i=1}^{4} (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (y_i - f(x_i))^2 = 12.8$$

واجب:

1- اوجد كثير الحدود ل(Lagrange) والذي يمر منحناه بالنقاط التالية:

x	1	2	3
$f(x)$	10	17	22

واستعمل كثير الحدود هذا لتقدير قيمة $f(1.5)$

2- اعد المثال باستخدام طريقة نيوتن للفروقات النسبية

3- اعد المثال باستخدام طريقة ادنى المربعات، اوجد معادلة الخط المستقيم ومعادلة القطع المكافئ