# Chapter 5

# الطرق التكرارية لحل الانظمة الغير خطية

## (Iterative methods for solving nonlinear systems)

افرض ان $F(x) = 0$ بحيث ان

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ . \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \leftarrow \text{المتجة الصفري}$$

اي ان لدينا $n$ من المعادلات و $n$ من المجاهيل وان نظام المعادلات يكون نظام غير خطي. في النظام الغير خطي (nonlinear system) تتظمن المعادلات متغيرات مرفوعة الى قوة اكبر من واحد او حاصل ضرب اكثر من متغير. سوف ندرس بعض الطرق العددية مثل Jacobi method و Gause-Seidel method واللتان تعتمدان بالاساس على طريقة النقطة الثابتة (fixed point method).

$$F(x) = 0, \rightarrow X = G(x) \rightarrow x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.

.

.

$$x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

في **Jacobi method** نحصل على

$$x_1^{(k+1)} = g_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = g_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

.

.

.

$$x_n^{(k+1)} = g_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

اي باستخدام طريقة النقطة الثابتة.

بينما في **Gauss-Seidel method**

$$x_1^{(k+1)} = g_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = g_2\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

.

.

.

$$x_n^{(k+1)} = g_n\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right)$$

مثال: باستخدام Gauss-Seidel method اوجد حل النظام الثنائي الا خطي

$$12x_1 - {x_2}^2 - 23 = 0, \qquad -2 \le x_1 \le 2,$$

$${x_1}^2 - 15x_2 + 11 = 0, \qquad -2 \le x_2 \le 2.$$

الحل:

$$x_1 = \frac{1}{12}[{x_2}^2 + 23] = g_1(x_1, x_2),$$

$$x_2 = \frac{1}{15}[{x_1}^2 + 11] = g_2(x_1, x_2),$$

لنفرض ان القيم الابتدائية $X^{(0)} = \binom{0}{0}$. اذن الصيغة التكرارية للنظام اعلاه هي

$${x_1}^{(k+1)} = \frac{1}{12}\left[(x_2{}^{(k)})^2 + 23\right],$$

$${x_2}^{(k+1)} = \frac{1}{15}\left[({x_1}^{(k+1)})^2 + 11\right]$$

At $k = 0$, we have

$${x_1}^{(1)} = \frac{1}{12}\left[(x_2{}^{(0)})^2 + 23\right] = \frac{23}{12} = 1.9166666666666667,$$

$${x_2}^{(1)} = \frac{1}{15}\left[({x_1}^{(1)})^2 + 11\right] = \frac{1}{15}\left[(\frac{23}{12})^2 + 11\right] = 0.9782407407407408.$$

للتوقف نستخدم ال norm

$$\| . \| < \varepsilon$$

الشرط الكافي لتقارب طريقة النقطة الثابتة (اسلوبي جاكوبي و كاوس سيدل) لحل نظام المعادلات غير الخطية هو:

$$\left|\frac{\partial g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right| \leq k_n, \text{ where } k < 1$$

For some constant $k$, $\forall\ i,\ j = 1,2, \ldots, n.$

مثال: نفرض المثال السابق، لاختبار الشرط الكافي للتقارب

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{1}{12}(2x_2) = \frac{x_2}{6} \leq \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{2}{15}x_1 \leq \frac{4}{15}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 0$$

$$k = \max\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{15}\right) = \frac{1}{3} < 1$$

اذن النظام يحقق الشرط الكافي للتقارب.

# طريقة نيوتن لحل نظام المعادلات غير الخطية

# (Newton's method)

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ . \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.

.

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

يكون النظام غير خطي اذا على الاقل دالة منها غير خطية.

Definition: (The jacobian matrix) ( $J(x)$) مصفوفة جاكوبي

$$\mathrm{J}(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

صيغة طريقة نيوتن لحل نظام غير خطي هي:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}.(-\mathrm{J}^{-1}(X^{(k)}).F(X^{(k)})$$

**<u>ملاحظة:</u>** $A^{(-1)} = \frac{1}{|A|}[\mathrm{cof(A)}]^T$ او يمكن استخدام اي طريقة اخرى لايجاد $\mathrm{J}^{-1}$

**ملاحظة:** هذه الطريقة تحتاج الى حساب معكوس مصفوفة جاكوبي مما يجعلها غير فعالة وذلك لصعوبة حساب معكوس المصفوفة خاصة عندما تكون المصفوفة ذات سعة كبيرة لذلك سوف نقوم بايجاد صيغة اخرى لهذة الطريقة للتخلص من حساب معكوس مصفوفة جاكوبي.

نفرض

$$Y^{(k)} = -\mathrm{J}^{-1}(X^{(k)}).F(X^{(k)}),\ \ Y^{(k)} = \begin{pmatrix} {y_1}^{(k)} \\ {y_2}^{(k)} \\ \vdots \\ {y_n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

وبضرب الطرفين في معكوس مصفوفة جاكوبي نحصل على

$$\mathrm{J}(X)^{(k)}Y^{(k)} = -F(X)^{(k)}$$

وهو نظام خطي بحيث يمكن ايجاد الحل $Y^{(k)}$ باستخدام الطرق العددية التي سبق ذكرها في الفصل الرابع.

$$\therefore\ X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$$

## خطوات الحل باستخدام طريقة نيوتن لحل نظام غير خطي

1- حساب المتجة $F(X^{(k)})$
2- حساب مصفوفة جاكوبي $\mathrm{J}(X^{(k)})$
3- حساب قيمة العمود $Y^{(k)}$ بحل النظام الخطي

$$\mathrm{J}(X^{(k)})Y^{(k)} = -F(X^{(k)})$$

4- ايجاد متجة النقطة الجديدة

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y^{(k)}$$

مثال: باستخدام طريقة نيوتن اوجد حل نظام المعادلات الغير الخطية التالي

$$12x_1 - {x_2}^2 - 23 = 0, \qquad -2 \le x_1 \le 2$$

$${x_1}^2 - 15x_2 + 11 = 0, \qquad -2 \le x_2 \le 2$$

علما ان $\epsilon = 10^{-2}$

الحل:

$$F(X) = \begin{bmatrix} 12x_1 - {x_2}^2 - 23 \\ {x_1}^2 - 15x_2 + 11 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2x_2 \\ 2x_1 & -15 \end{bmatrix}$$

Consider $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

At $k = 0$, we have

$$F\left(X^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} -23 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$J\left(X^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix},$$

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} {y_1}^{(0)} \\ {y_2}^{(0)} \end{bmatrix}$$

We have the result

$$J\left(x^{(0)}\right).Y^{(0)} = -F(X^{(0)})$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {y_1}^{(0)} \\ {y_2}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Solve for $y_1,\ y_2$, we have

$${y_1}^{(0)} = \frac{23}{12}, \quad {y_2}^{(0)} = \frac{11}{15}$$

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} \\ \\ \frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{23}{12} \\ \frac{11}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} \\ \frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: نعتمد على شرط ال vector norm للتوقف كما في السابق

$$\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| \leq \epsilon$$

At $k = 1$,

$$F\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}12\left(\frac{23}{12}\right)-\left(\frac{11}{15}\right)^{2}-23\\ \left(\frac{23}{12}\right)^{2}-15\left(\frac{11}{15}\right)+11\end{bmatrix}$$

$$J\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}12 & -2\left(\frac{11}{15}\right)\\ 2\left(\frac{23}{12}\right) & -15\end{bmatrix}$$

Solve for $Y^{(1)}=\begin{bmatrix}y_1{}^{(1)}\\ y_2{}^{(1)}\end{bmatrix}$

$$J\left(X^{(1)}\right).Y^{(1)}=-F(X^{(1)})$$

$$\begin{bmatrix}12 & \left(\frac{-22}{15}\right)\\ \frac{23}{6} & -15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1{}^{(1)}\\ y_2{}^{(1)}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\left(\frac{-11}{15}\right)^{2}\\ \left(\frac{23}{12}\right)^{2}\end{bmatrix}$$

انيا نجد قيمة $y_1{}^{(1)}$، $y_2{}^{(1)}$ ومن ثم نجد قيمة $X^{(2)}$ الجديدة باستخدام الصيغة

$$X^{(2)}=X^{(1)}+Y^{(1)}$$

# تمارين

**1-** افرض ان

$$x_1=\alpha\, x_2{}^{2}-1$$

$$x_2=\beta x_1{}^{(3)}$$

اوجد قيم $\alpha$، $\beta$ حتى يكون للنظام نقطة ثابتة في المنطقة

$$-1 \le x_1 \le 1$$

$$-1 \le x_2 \le 1$$

تذكير: الشرط الكافي لوجود حل وحيد للنظام غير الخطي بطريقة النقطة الثابتة $x = G(x)$، هو $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \le k_n \ , k < 1$

**2-** باستخدام طريقة النقطة الثابتة اوجد حل النظام الاتي:

$$5x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

بحيث $x_1{}^{(0)} = x_2{}^{(0)} = 0.25$ ومعيار التوقف هو $\varepsilon = 10^{-2}$

ملاحظة: باستخدام النقطة الثابتة يقصد طريقة جاكوبي او طريقة كاوس سيدل ولكننا نستعمل طريقة كاوس سيدل كونها اسرع.

**3-** باستخدام طريقة نيوتن رافسون اوجد حل النظام

$$\sin x_1 - \cos x_2 = 0$$
$$\cos x_1 + \sin x_2 = 2$$

$$\boldsymbol{x_1{}^{(0)} = x_2{}^{(0)} = \frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon = 10^{-2}}$$