تعريف: (استمرارية الدالة) continuity of a function

تكون الدالة $f(x)$ مستمرة عند نقطة معينة مثل x_0 اذا كانت نهايتي قيمة الدالة عند الاقتراب من النقطة x_0 من اي من الاتجاهين، متساويين وتساويان قيمة الدالة عند النقطة x_0

اي تكون الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة x_0 اذا كان:

$$f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

مثال: الدالة

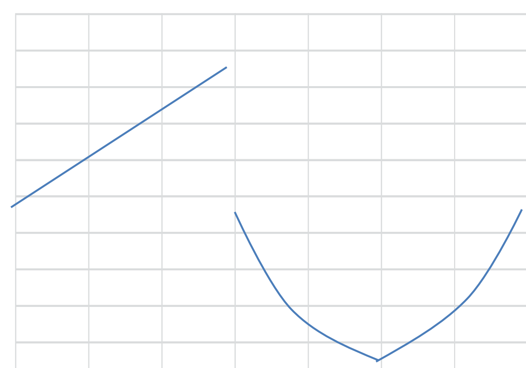
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi}, & for \quad 0 \le x \le \pi \\ sin\ (x), & for \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

والمرسومة في الشكل (1) ادناه غير مستمرة عند النقطة $x_0 = \pi$، لان:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = sin\,(\pi) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



الشكل (1)

▪ اشتقاق الدالة Differentiability of a function

تكون الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة مثل x_0، اذا كانت القيمة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة، وتسمى هذه القيمة مشتقة الدالة $f(x_0)$ عند النقطة x_0 ويرمز لها بالرمز $f'(x_0)$
وتعرف المشتقة عند نقطة هندسياً بانها ميل المماس للمنحني عند تلك النقطة.

مثال: الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & for\ 0 \le x \le \pi \\ sin\ (x), & for\ \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = \pi$.

الحل:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi^-} \frac{\frac{x}{\pi}-1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\frac{x-\pi}{\pi}}{x-\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{sin(x)-sin(\pi)}{x-\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{sin(x)}{x-\pi}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال(L'Hopital's Rule) :

$$f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{sin(x)}{x-\pi} = f'(x_0) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{cos(x)}{-\pi} = \frac{cos(\pi)}{-\pi} = -1$$

وعليه الدالة غير قابلة للاشتقاق لان الغاية من جهة اليمين لا تساوي الغاية من جهة اليسار

$$f(x) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ne \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مثال: اختبر قابلية الاشتقاق للدالة

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\pi} & for \quad 0 \le x \le \pi \quad , \\ \cos x & for \ \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

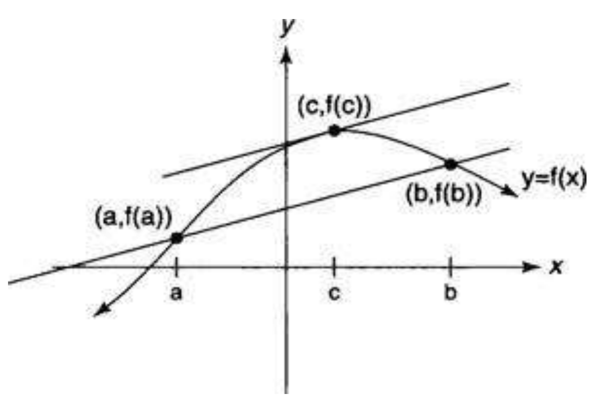
▪ نظرية القيمة المتوسطة The mean-value theorem

اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b)، فان هناك نقطة الفترة المفتوحة (a, b) مثلا النقطة c بحيث ان قيمة المشتقة عند تلك النقطة تساوي متوسط التغير للدالة $f(x)$ في الفترة (a, b) .

اي ان:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وكما موضح في الشكل ادناه



مثال: اوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = -x^2 + x + 1$ **عند الفترة** $[0,1]$

الحل: مشتقة الدالة $f(x)$ هي: $f'(x) = -2x + 1$

نلاحظ ان الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(0,1)$

بما ان $f(a) = f(0) = 1, f(b) = f(1) = 1$ ، بواسطة نظرية القيمة المتوسطة نحصل على $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1-1}{1-0} = 0$

نساوي قيمة ال $f'(c)$ مع $f'(x)$ اي: $f'(c) = -2c + 1$ وعليه نحصل على :

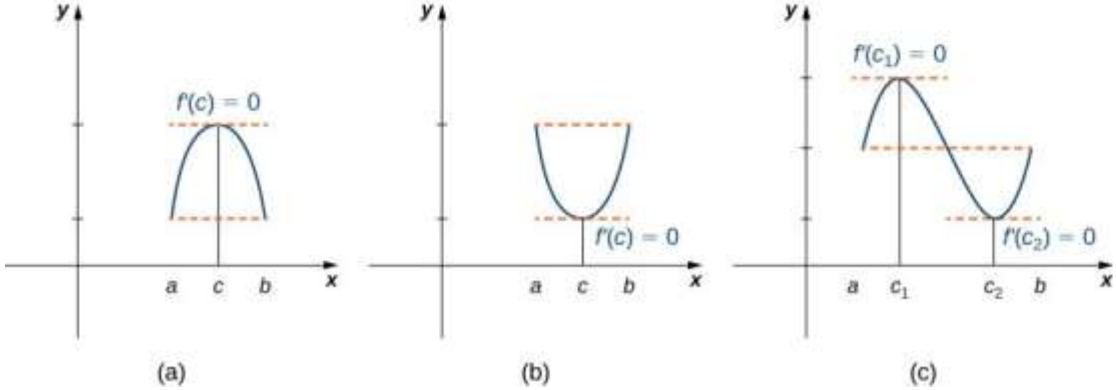
$$-2c + 1 = 0 \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

سؤال: جد كل الاعداد التي تحقق مضمون نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 2x^2 - x \quad on \quad [-1,2]}$$

▪ نظرية رول Roll's Theorem

نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية القيمة المتوسطة، وتنص على انه اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)،
وكانت $f(a) = f(b)$ فان هناك نقطة في الفترة المفتوحة (a,b)، مثل النقطة e بحيث ان قيمة المشتقة عند تلك النقطة تساوي صفراً اي ان $f'(c) = 0$. وهذا يعني ان المماس للدالة عند النقطة c يكون موازٍ لمحور السينات.



مثال: افرض $f(x) = x^2 + 2x$ **جد كل قيم** c **في الفترة** $[-2,0]$ **بحيث** $f'(c) = 0$

الحل:

أولاً نحتاج ان نتأكد بان الدالة تحقق جميع شروط نظرية رول

1- الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $[-2,0]$ لأنها متعددة حدود
2- الدالة قابلة للاشتقاق عند جميع النقاط في الفترة $(-2,0)$
3- $f(b) = f(0) = 0 \qquad f(a) = f(-2) = 0,$
$\rightarrow f(a) = f(b) = 0$

وعليه نستطيع ان نستخدم نظرية رول لإيجاد قيمة ال c

اولاً نجد المشتقة

$$f'(x) = 2x + 2$$

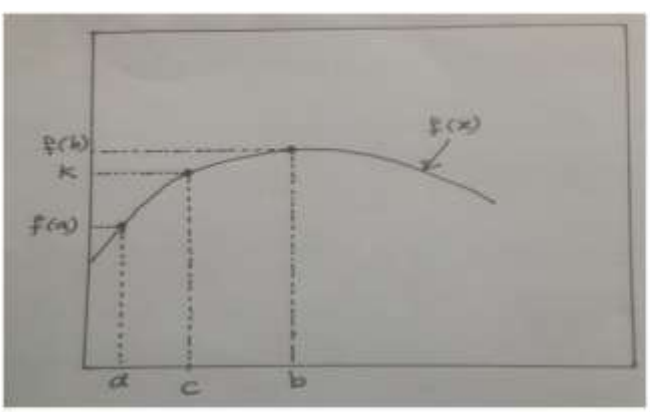
ثم نحل المعادلة: $f'(c) = 0$

$$f'(c) = 2c + 2 = 0 \quad \rightarrow c = -1$$

سؤال: افرض الفترة $[a,b]$ **والتي تحقق شروط نظرية رول للدالة** $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$
اذا كانت قيمة $a = 0$ **جد قيمة** b

• نظرية القيمة الوسيطة Intermediate-Value Theorem

اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان k عددا محصوراً بين القيمتين $f(a)$ و $f(b)$ بحيث $f(a) \le k \le f(b)$، فان هناك نقطة مثل c في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث ان $f(c) = k$ وكما مبين في الشكل التالي:



مثال: افرض الدالة المستمرة f مع الجدول الاتي الذي يحتوي على مجموعة من القيم

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	4	3	-1	1

اين يجب ان يوجد الحل للمعادلة $f(x) = 2$ ؟

الحل:

نلاحظ ان $f(-1) = 3$ و $f(0) = -1$ الدالة $f(x) = 2$ يجب ان تأخذ قيمة بين -1 و 3 في الفترة $[-1,0]$ بما ان 2 تقع بين -1 و 3، اذن يجب ان توجد قيمة مثلا c تنتمي الى الفترة $[-1,0]$ بحيث $f(c) = 2$

سؤال: اذا كانت الدالة f مستمرة و $f(-2) = 3, f(1) = 6$ اي من القيم التالية تحقق نظرية القيمة الوسيطة ؟

1- $f(c) = 4$، بحيث c بين 3 و 6
2- $f(c) = 0$، بحيث c بين -2 و 1
3- $f(c) = 4$، بحيث c بين -2 و 1
4- $f(c) = 0$، بحيث c بين 3 و 6

مثال: اثبت ان للمعادلة $x = (\ln \ln x)^x$ جذر في الفترة $[4, 5]$ ثم بتصنيف هذه الفترة ثلاث مرات متتالية اوجد قيمة تقريبية لهذا الجذر.

الحل: كوّن الدالة $f(x) = x - (\ln \ln x)^x$ ، لهذه الدالة

$$f(4) = 0.3066 > 0$$

$$f(5) = -5.7987 < 0$$

وحسب نظرية القيمة الوسيطة، وبما ان الدالة قد غيرت اشارتها عند طرفي الفترة $[4,5]$، فأن هناك نقطة داخل لك الفترة مثل c بحيث ان $f(c) = 0$

بتصنيف هذه الفترة يصبح لدينا فترتين $[4,4.5]$, $[4.5,5]$

- للفترة الاولى $f(4) = 0.3066 > 0$، و $f(4.5) = -1,7765 < 0$
- للفترة الثانية $f(4.5) = -1.7765 < 0$، و $f(5) = -5.7987 < 0$

من تغير اشارة الدالة عند طرفي الفترة الاولى نستنتج ان صفر هذه المعادلة يقع في هذه الفترة.

بتصنيف الفترة الاولى مرة اخرى، يصبح لدينا الفترتين [4,4.25] ,[4.25,4.5]

- للفترة الاولى $f(4) = 0.3066 > 0$، و $f(4.25) = -0.5572 < 0$
- للفترة الثانية $f(4.25) = -0.5572 < 0$، و $f(4.5) = -1.7765 < 0$

من تغير اشارة الدالة عند طرفي الفترة الاولى نستنتج ان صفر هذه المعادلة يقع في هذه الفترة.

بتصنيف الفترة الاولى مرة ثالثة، يصبح لدينا الفترتين [4,4.125] ,[4.125,4.25]

- للفترة الاولى $f(4) = 0.3066 > 0$، و $f(4.125) = -0.087 < 0$
- للفترة الثانية $f(4.125) = -0.087 < 0$، و $f(4.25) = -0.5572 < 0$

من تغير اشارة الدالة عند طرفي الفترة الاولى نستنتج ان صفر هذه المعادلة يقع في هذه

الفترة، اي ان

$$4 \leq x_0 \leq 4.125$$

حيث x_0 هو صفر هذه الدالة.

ملاحظة: القيمة الدقيقة لجذر هذه المعادلة هي 4.09926